Corrigé : Exercices

Systèmes linéaires

Exercice 1/17

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{l} x+y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=4 \\ x+3y-z=11 \\ 2x+5y-5z=13 \\ x+4y+z=18 \end{array}\right.$

Solution :

1. $S=\{(2z-4t-2;-3z+7t+3,z,t)$ avec $(z,t)\in\mathbb{R}^2\}$
2. $S=\{(4,3,2)\}$

Exercice 2/17

Soit m un réel. Résoudre le système suivant $\left\{\begin{array}{l} x+my=-3 \\ mx+4y=6 \end{array}\right.$
(on pourra discuter en fonction de m). Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

Solution :

- Si $m\neq 2$ et $m\neq -2$ les droites sont sécantes au point de coordonnées $\left(\dfrac{6}{m-2};\dfrac{-3}{m-2}\right)$.
- Si $m=2$, les droites sont strictement parallèles (donc $S=\emptyset$).
- Si $m=-2$, les droites sont confondues et $S=\{(-3+2y,y)$ avec $y\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 3/17

Résoudre les systèmes suivants par la méthode du pivot de Gauss :

1. $\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 2x - 5y - 4z = 6 \\ -3x + y - 5z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 3x - 3y + 3z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 5x - 5y + 5z + 7t = 0 \end{cases}$

Solution :

1. $S = \{\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)\}$
2. $S = \{(-1, -1, 1)\}$
3. $S = \{\left(\frac{1}{2}k, k, \frac{5}{7}\right) \ avec \ k \in \mathbb{R}\}$
4. $S = \{(k - k', k, k', 0) \ avec \ (k, k') \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 4/17

Résoudre à l'aide du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solution :
$S = \{(-1, 0, 2)\}$

Exercice 5/17

Les systèmes suivants sont-ils équivalents ?

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x - z = 1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -x + y = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ -y + z = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Solution : Non, $S = \{(1, 2, 0)\}$ et $S = \{(1 + k, 2 + k, k) \ avec \ k \in \mathbb{R}\}$

Exercice 6/17

En utilisant la notation allégée, résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2t + x + 2y + 3z = 1 \\ t + x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ -3x - 6y - 8z = -30 \\ -4x - 8y - 11z = -41 \end{cases}$

Solution :

1. $S = \emptyset$
2. $S = \{(1+y; -4y-3z-1; y; z) \ avec \ (y;z) \in \mathbb{R}^2\}$
3. $S = \{(2-2y; y; 3) \ avec \ y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 7/17

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right)$

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right)$

Solution :

1. $S = \{(1-u; 2z; z; -2u; u) \ avec \ (z;u) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $S = \emptyset$
3. $S = \{\left(2; \frac{1}{5}; 0; \frac{4}{5}\right)\}$
4. $S = \{\left(-\frac{4}{3}; 2; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right)\}$

Exercice 8/17

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Solution :

1. $S = \{\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\}$
2. $S = \{(-2; 3; -2)\}$

Exercice 9/17

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} ix - 3y & = 2 - 3i \\ (1+i)x + 2iy & = 5 - i \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 2(1+i)y & = 4 - 6i \\ x + 3iy & = -3 - 2i \end{cases}$

3. $\begin{cases} (2+i)x + 7y & = 1 + 2i \\ (1-i)\overline{x} + i\overline{y} & = 4 - i \end{cases}$

4. $\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y & = 2 + 6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y & = 5 + 4i \end{cases}$

Solution :

1. $S = \{\left(\dfrac{12}{5} - i\dfrac{31}{5}; \dfrac{7}{5} + i\dfrac{9}{5}\right)\}$
2. $S = \{\left(\dfrac{12}{5} - i\dfrac{31}{5}; \dfrac{7}{5} + i\dfrac{9}{5}\right)\}$
3. $S = \{\left(\dfrac{193}{39} - i\dfrac{17}{39}; -\dfrac{25}{39} + i\dfrac{6}{13}\right)\}$
4. $S = \{(1+i; i)\}$

Exercice 10/17

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x+y+z & = 1 \\ 2x - y + 2z & = 1 \\ x + 2y + z & = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

2. $\begin{cases} x+y+z+t & = 4 \\ x + \beta y + z + t & = 4 \\ x + y + \beta z + (3-\beta)t & = 6 \\ 2x + 2y + 2z + \beta t & = 6 \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$

Solution :

1. – Si $\alpha = \dfrac{4}{3}$, $S = \{\left(\dfrac{2}{3} - z; \dfrac{1}{3}; z\right) \textit{ avec } z \in \mathbb{R}\}$
   – Si $\alpha \neq \dfrac{4}{3}$, pas de solution.
2. – Si $\beta = 1$, $S = \{(2-y-z; y; z; 2) \textit{ avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$
   – Si $\beta \neq 1$ pas de solution

Exercice 11/17

Déterminer tous les polynômes P de degré au plus 3 tels que

$$P(-1) = -10 \quad P(2) = 17 \quad P(3) = 54 \quad P(-2) = -31$$

Solution : $P(X) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$

Exercice 12/17

Déterminer suivant la valeur des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = b \end{cases}$

Solution :

- Si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, $S = \{\left(\dfrac{b}{1+a}; \dfrac{b}{1+a}\right)\}$
- Si $a = 1$, $S = \{(b-y; y) \textit{ avec } y \in \mathbb{R}\}$
- Si $a = -1$,
  - Si $b \neq 0$ pas de solution
  - Si $b = 0$, $S = \{(y; y) \textit{ avec } y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 13/17 : Système mal conditionné

Résoudre les deux systèmes suivants. Qu'en pensez-vous ?

1. $\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ 9x + 10y + 5z = 40 \\ 10x + 9y + z = -50 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ 9x + 10y + 5z = 41 \\ 10x + 9y + z = -50 \end{cases}$

Solution :

1. $S = \{(10; -20; 30)\}$
2. $S = \{(-66; 69; -11)\}$

Exercice 14/17

Déterminer, selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et en utilisant l'algorithme de Gauss, l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}$$

Solution :

- Si $m \neq -2$, pas de solution
- Si $m = -2$, $S = \{(0; z + 1; z) \ \ avec \ z \in \mathbb{R}\}$

Exercice 15/17

Résoudre le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre m.

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

Solution :

- Si $m = 1$, $S = \{(-y - z; y; z) \ \ avec \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$
- Si $m \neq 1$
  - Si $m = -2$, $S = \{(z; z; z) \ \ avec \ z \in \mathbb{R}\}$
  - Si $m \neq -2$ $S = \{(0; 0; 0)\}$

Exercice 16/17

Équilibrer les équations chimiques suivantes :

1. $$NH_3 + O_2 \longrightarrow NO + H_2O$$
2. $$C_2H_6 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

Solution :

1. $$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O$$
2. $$2C_2H_6 + 7O_2 \longrightarrow 4CO_2 + 6H_2O$$

Exercice 17/17

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère $\mathcal{P}_1$ (respectivement $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \quad : \quad 2x - 3y + 4z = -3$$

$$\mathcal{P}_2 \quad : \quad -x + 2y + z \ = \ 5$$

$$\mathcal{P}_3 \quad : \quad 4x - 5y + 14z = 1$$

1. Quelle est la nature géométrique de chacun des $\mathcal{P}_i$?
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$. Quelle est sa nature géométrique ?

Solution :

1. Plans
2. Droite passant par $(9; 7; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$