Version 251103

2025/2026

Nombres complexes

I Rappels

I.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition

- On appelle **forme algébrique** d'un nombre complexe z l'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels.
- Soit un nombre complexe $z = a + ib$, on appelle **nombre complexe conjugué de z**, le nombre noté $\overline{z}$, tel que $\overline{z} = a - ib$.

Remarque

- Le nombre a s'appelle la partie réelle et la nombre b s'appelle la partie imaginaire. On note : $Re(z) = a$ et $Im(z) = b$
- Si l'on additionne un nombre complexe et son conjugué, on obtient le double de sa partie réelle : $z + \overline{z} = 2a$

Exercice : résolution d'équations dans $\mathbb{C}$
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

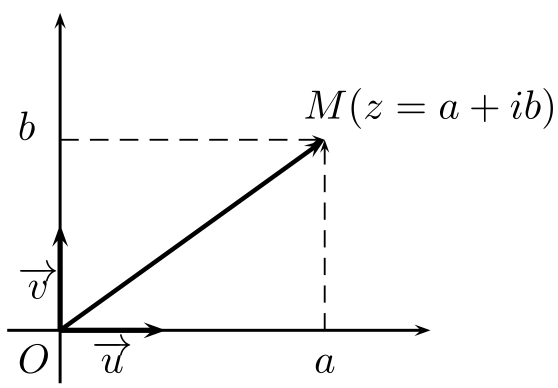
a. $3z - 6 = 4i + z$

b. $z^2 + 5 = 0$

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ direct.

- À tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $(a; b)$ et tout vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$.
- À tout point $M(a; b)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, et à tout vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\overrightarrow{w}$.



Exercice : plan complexe

Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1-2i$, $z_B = 4-i$ et $z_C = \sqrt{2}+\dfrac{3}{2}i$ dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

Définition

Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc **axe réel**.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0 + iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc **axe imaginaire (pur)**.

II Exercices

Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes.

Exercice 1

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- $(2+3i)+(-1+6i)$
- $(5+i)-(3-2i)$
- $(1+i)(3-2i)$
- $(4+i)(-5+3i)$
- $(2-i)^2$
- $(x+iy)(x'+iy')$
- $(x+iy)^2$
- $(2-3i)(2+3i)$
- $(a+ib)(a-ib)$

Exercice 2

Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a. Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b. En déduire que les points A, B et C sont alignés.
c. Placer les points A, B et C.

Exercice 3

Les points A, B et C ont pour affixe respective $1+\dfrac{1}{2}i$, $\dfrac{3}{2}+2i$ et $-1-\dfrac{11}{2}i$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 4

On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.

a. Faire une figure
b. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 5

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$
- $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$
- $2+i\sqrt{3}(5-i)+\dfrac{1}{2}+3i^2$
- i^3
- $\dfrac{1}{i}$
- i^4
- i^5
- i^6

Exercice 6

À propos de j.

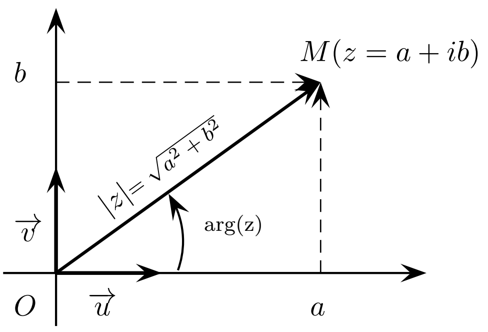
a. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
b. Calculer la somme : $S = 1+i+i^2+\cdots+i^{2014}$
c. On pose $j = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1+j+j^2$.

III Module et argument dun nombre complexe

Définition

Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- On appelle **module** de z le nombre **réel positif** $\sqrt{a^2 + b^2}$ noté $|z|$. Cette valeur est égale à la distance OM.
- On appelle **argument** du nombre complexe non nul z, noté $arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$.



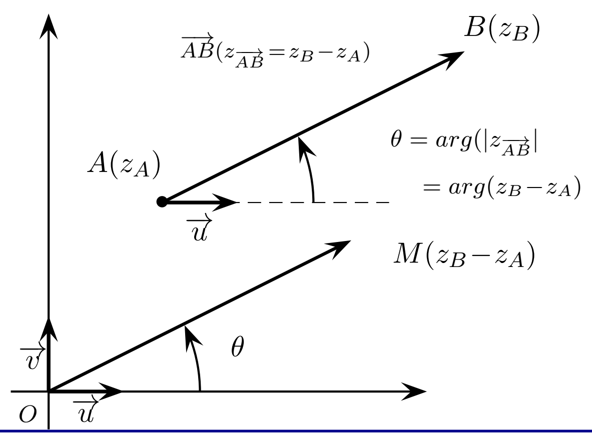
Remarque

Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces argument, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On note $arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $arg(z) = \theta\ [2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $arg(z) = \theta$.

Propriété

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_a|$
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)$.



Propriété

Pour tout nombres complexes z et z' :

- si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|-z| = |z|$ et $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et $|z^n| = |z|^n$ et $\dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{z}{z'}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Exercices :

Exercice 1

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i\ ,\ z_B = 4 + 5i\ ,\ z_C = 5 - 2i\ .$$

a. Montrer que $AB = AC$, puis que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$.

b. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.

c. Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.

d. Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

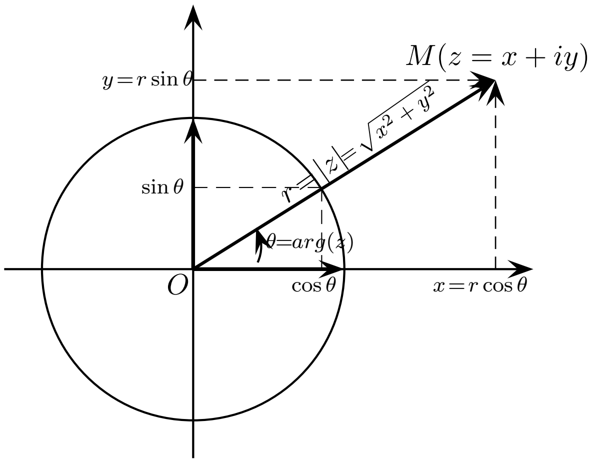
Exercice 2

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

• $|z - 6i| = 3$ • $|z + 3 - 2i| < 2$ • $|z + 2| = |z - 3i + 1|$ • $|2 - iz| = |z + 5|$ • $|\dfrac{z + 2i}{z + 1 - 2i}| > 1$

IV Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x;y)$, ou son affixe complexe $z = x + iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r;\theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$.
On a les relations :
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r} \Longleftrightarrow x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
L'affixe z du point M s'écrit alors, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
Cette écriture est la **forme trigonométrique** de z.



Définition

Exercice :
Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z_1 = 3$
- $z_2 = -4$
- $z_3 = 2i$
- $z_4 = -1+i$
- $z_5 = -\sqrt{3}+i$
- $z_6 = -17$
- $z_7 = -6\sqrt{3}+6i$
- $z_8 = 5i$
- $z_9 = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

V Exponentielle complexe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi, et,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos\theta = i(i\sin\theta + \cos\theta) = if(\theta)$$

Comme de plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$, on en déduit que f est définie de manière unique par l'expression $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
Ainsi, tout complexe z s'écrit sous la forme exponentielle complexe :

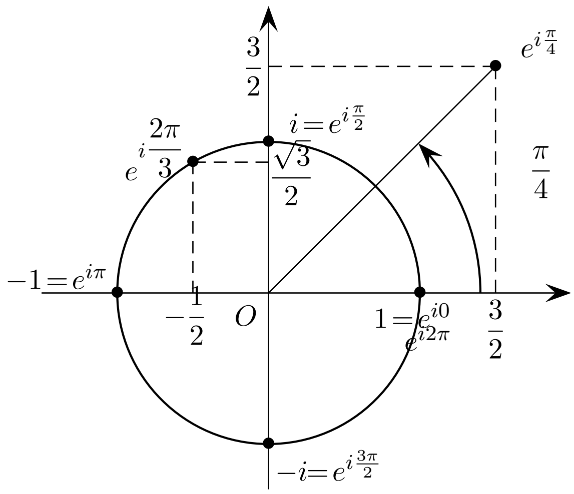
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

où, $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$.

Propriété

Exemple

- $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$
- $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$



V.1 Exercices

a. Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

(a) $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(b) $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$

(c) $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

(d) $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

(e) $2e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

(f) $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

b. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

(a) 5

(b) $4 + 4i$

(c) $\frac{3}{2}i$

(d) $\dfrac{2}{1-i}$

(e) $\sqrt{3} - i$

(f) $(\sqrt{3} - i)^2$

(g) $(\sqrt{3} - i^3)$

Propriété

Pour tous réels θ et θ', et tout entier naturel n,

- $|e^{i\theta}| = 1$, et $arg(e^{i\theta}) = \theta$
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (Formule de Moivre), c'est-à-dire, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta'\ [2\pi]$

V.2 Exercices

a. On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\frac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2, z_3^6.

b. Simplifier l'expression, où $\theta \in \mathbb{R}$,

$(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2})^2 + (\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i})^2$.

Était-ce prévisible sans calcul ?

c. Écrire le nombre complexe $(\sqrt{3} - i)^{10}$ sous forme algébrique.

VI Formules de trigonométrie

VI.1 Formules d'addition

Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Propriété

Démontrer la propriété précédente..

Exercices :

Exercice 1 :

À l'aide des formules d'addition, montrer que :

a. $2\cos(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\cos(\frac{2}{3}x) + \sin(\frac{2}{3}x)$

b. $\sin(x + \frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

c. $4\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\sin(2x) - 2\sqrt{2}\cos(2x)$

Exercice 2 :

En utilisant les formules d'addition, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus de :

a. $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

b. $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

c. $\frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.

Formules de duplication :

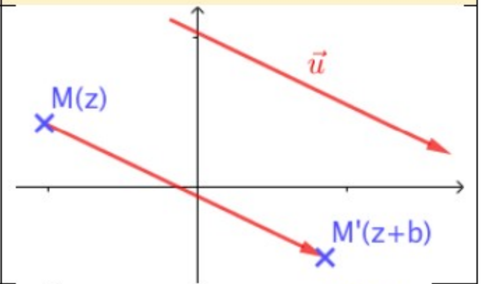
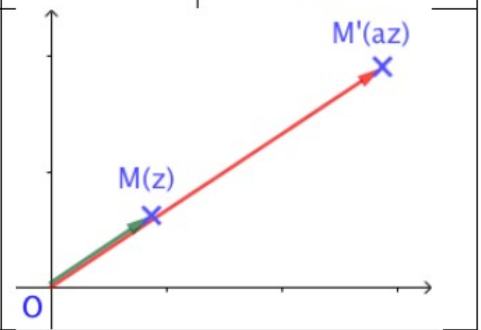
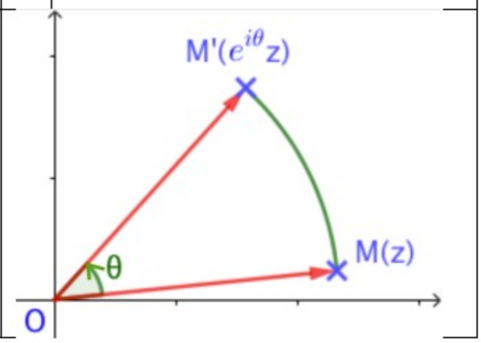
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Propriété

Démontrer la propriété précédente..

VII Expression complexe des transformations

Soit un point M daffixe z associé à un point M' daffixe z' par une transformation du plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Il existe alors une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z) = z'$ La fonction f permet dexprimer laffixe z' de M' en fonction de laffixe z de M.

TRANSFORMATION	DÉFINITION	FONCTION ASSOCIÉE	FIGURE
Translation de vecteur $\vec{u}$ (d'affixe b)	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$f(z) = z + b$	
Homothétie de centre O et de rapport a (non nul)	$\overrightarrow{OM'} = a\,\overrightarrow{OM}$	$f(z) = az$	
Rotation de centre O et d'angle θ	$OM' = OM$ $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) = \theta$	$f(z) = e^{i\theta}z$	

Exercice :
Soit les fonctions f, g et h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, données par les expressions suivantes :
$f(z) = (1-i)(1+i)z$; $g(z) = z - 2i$; $h(z) = -e^{i\frac{\pi}{3}}z$

Reconnaître la nature des transformations qui sont associées à chaque fonction.
On précisera les éléments qui caractérisent ces transformations.

Transformer $A\cos(\omega t+\phi)=a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)$
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)=\sqrt{3}\cos(3t)+\sin(3t)$.
Écrire f sous la forme : $f(t)=A\cos(\omega t+\phi)$, A et ϕ à déterminer.