2025/2026

Logique

La langue française peut parfois être ambigüe. Prenons lexemple de la conjonction « ou » ; au restaurant « fromage ou dessert » signifie lun ou lautre mais pas les deux. Par contre si dans un jeu de carte on cherche « les as ou les curs » alors il ne faut pas exclure las de cur. Autre exemple : que répondre à la question « As-tu 5 euros en poche ? » si lon dispose de 15 euros ?
Les mathématiques sont un langage permettant de sexprimer de manière rigoureuse, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider ou dinfirmer une hypothèse et de lexpliquer à autrui.

I Notion d'ensemble

I.1 Langage des ensembles

Un ensemble est une collection dobjets, appelés éléments. Il est toujours possible de dire avec certitude si un élément appartient ou non à l'ensemble.
Pour exprimer le fait quun élément x appartient à un ensemble E, on écrit $x \in \mathbb{E}$. Si x nappartient pas à lensemble E, on écrit $x \notin E$.

- Pour décrire un ensemble, on peut écrire ses éléments entre deux accolades en les séparant par des points-virgules. On dit alors que lensemble est défini **en extension**.
  Par exemple $\{0\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 7\ ;\ 9\}$
  Lorsque la liste est trop longue ou infinie, il nest pas possible de définir lensemble en extension.
- Un autre type de description consiste à décrire lensemble à laide dune propriété caractérisant les éléments de lensemble. On dit alors que lensemble est défini **en compréhension**.
  Par exemple, lensemble des diviseurs de 25 sécrit $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 25\}$
- Un troisième type de description consiste à décrire un ensemble à laide dune fonction. On dit alors que lensemble est défini comme **image directe**.
  Par exemple, lensemble des entiers naturels pairs sécrit $\{2n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$

Il existe plusieurs ensembles particuliers à connaître :

- l'ensemble vide est l'ensemble ne contenant aucun élément. On le note $\{\}$ ou $\varnothing$.
- Un singleton est un ensemble contenant un seul élément. Par exemple $\{2\}$ est un singleton.
- Une paire est un ensemble contenant deux éléments. Par exemple $\{5\ ;\ 7\}$.

Un ensemble A est un sous-ensemble de E (ou une partie de E) si tout élément de $x \in A$ est élément de E.
On dit aussi que A est inclus (ou contenu) dans E. On note alors $A \subset E$.
Par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
La négation de $A \subset E$ est $A \not\subset E$. Cela signifie qu'au moins un élément de A n'appartient pas à E.

I.2 Construction d'ensemble

Soit A et B deux sous-ensembles dun ensemble E.

Intersection

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Réunion

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Ensembles disjoints

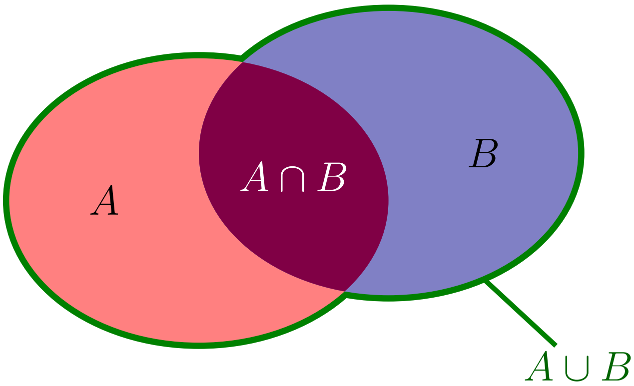
On dit que deux ensembles sont disjoints lorsquils nont aucun élément en commun.

$$A \cap B = \varnothing$$

Complémentaire

Le complémentaire de A dans E, noté $\overline{A}$ ou $E \backslash A$ ou $\complement_E^A$, est le sous-ensemble de E formé des éléments de E qui nappartiennent pas à A.

$$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$



D'après **les lois de Morgan**, on a :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ et } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

II Éléments de logique

- Une proposition (ou assertion) est un énoncé dont on peut dire avec certitude quil est vrai ou faux.

- La négation dune proposition $\mathcal{P}$, notée (non $\mathcal{P}$) ou $\overline{\mathcal{P}}$, est une nouvelle proposition obtenue en niant la proposition $\mathcal{P}$.
  Par exemple, la négation de « 3 est un nombre pair »est « 3 n'est pas un nombre pair ».

- La conjonction des propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée « $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ », est une nouvelle proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux vraies, et dans ce cas seulement.
  Par exemple, la conjonction de « 11 est un nombre premier »et « 11 est un nombre impair »est vraie.
  Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

- La disjonction des propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée « $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ », est une nouvelle proposition qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux fausses, et dans ce cas seulement.
  Par exemple, la disjonction de « 11 est un nombre premier » et « 11 est un nombre pair » est vraie. Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

- Limplication des propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, notée « $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ », est une nouvelle proposition.
  Par exemple, « s'il pleut, alors il y a des nuages » est vraie. Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

Dans l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour $\mathcal{Q}$. En revanche, on dit que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire pour $\mathcal{P}$.

Remarque

- L'implication $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$ est appelée réciproque de l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
- Lorsque la réciproque est également vraie, on dit que les propositions sont équivalentes et on note $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ Table de vérité :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

- L'implication $non(\mathcal{Q}) \Longrightarrow non(\mathcal{P})$ est appelée contraposé de l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

III Quelques règles de base de la logique

Nous utiliserons l'axiome (cest-à-dire une proposition indémontrable utilisée comme fondement dune théorie mathématique) suivant :

« Quelle que soit la proposition $\mathcal{P}$, lune des deux propriétés $\mathcal{P}$ et (non $\mathcal{P}$), et lune seulement, est vraie. »

Propriété

- Si $\mathcal{P}$ est une proposition vraie et si $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, alors $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Si la conjonction $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})$ est vraie, alors $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R})$ est vraie.
- Pour toute proposition $\mathcal{P}$, non(non $\mathcal{P}$) équivaut à $\mathcal{P}$.
- Toute implication est équivalente à sa contraposée.

IV Quantificateurs

Définition

Un prédicat à une variable astreint à un ensemble E est une expression de la forme $\mathcal{P}(x)$ qui devient, chaque fois que lon assigne à x une valeur dans E, soit une proposition vraie, soit une proposition fausse.

Par exemple, $\mathcal{P}(x)$: "$x^2 > x$" est un prédicat vrai si $x > 1$ ou $x < 0$ et faux sinon.

Définition

- Lorsque pour toute valeur de x dans E, le prédicat $\mathcal{P}(x)$ est vrai, on note :

$$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$$

- Lorsquil existe (au moins) une valeur de x dans E pour laquelle le prédicat $\mathcal{P}(x)$ est vrai, on note :

$$\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$$

La notion de prédicat à une variable sétend également à la notion de prédicat à plusieurs variables. Dans le cas dun prédicat à deux variables, le prédicat sera précédé par deux quantificateurs :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = x^3 + y^3$$

On ne peut pas intervertir les quantificateurs sans changer le sens de la proposition !

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = x^3 + y^3 \ \text{ est vrai}$$

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} \mid x + y = x^3 + y^3 \ \text{ est faux}$$

Remarque

V Négation d'une proposition logique

Lois de Morgan :

- non($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) équivaut à (non($\mathcal{P}$) ou non($\mathcal{Q}$))
- non($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) équivaut à (non($\mathcal{P}$) et non($\mathcal{Q}$))

Propriété

Exemple

La négation de ($x < -1$ ou $x > 1$) est ($x \geq -1$ et $x \leq 1$).

Négation d'une propriété :

$$\text{non}(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ équivaut à } (\text{non}(\mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{P})$$

Propriété

Exemple

La négation de limplication « Sil y a des nuages, alors il pleut »sécrit « Il y a des nuages et il ne pleut pas ».

Exemple

Quelques questions :

a. Écrire la table de vérité du « ou exclusif ». (Cest le ou dans la phrase « fromage ou dessert », lun ou lautre mais pas les deux.)
b. Écrire la table de vérité de « non ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) ». Que remarquez vous ?
c. Écrire la négation de « $\mathcal{P} \Longrightarrow$ non($\mathcal{Q}$) ».
d. Écrire la négation de « $\mathcal{P}$ et ($\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$)

VI Négation dune proposition écrite à laide de quantificateurs

Propriété

- $\exists x \in E,\ \text{non}(\mathcal{P}(x))$ est la négation de $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$
- $\forall x \in E,\ \text{non}(\mathcal{P}(x))$ est la négation de $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$

Remarque

Quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$ » cela signifie juste quil existe un réel pour lequel f sannule. Rien ne dit que ce x est unique. Dans un premier temps vous pouvez lire la phrase ainsi : « il existe au moins un réel x tel que $f(x) = 0$ ». Afin de préciser que f sannule en une unique valeur, on rajoute un point dexclamation :

$$\exists\ !\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$$

VII Raisonnement usuels

VII.1 Raisonnement direct

On veut montrer que lassertion « $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ »est vraie. On suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et on montre qualors $\mathcal{Q}$ est vraie. Cest la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple

Montrer que si a, $b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

VII.2 Disjonction des cas

Si lon souhaite vérifier une assertion $\mathcal{P}(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre lassertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x nappartenant pas à A. Cest la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

VII.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur léquivalence entre une implication et sa contraposée. On montre alors la contraposée pour montrer la proposition.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

VII.4 Absurde

Le raisonnement par labsurde pour montrer « $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que $\mathcal{P}$ est vraie et que $\mathcal{Q}$ est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ doit être vraie et donc « $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ » est vraie.

Exemple

Soit $a,\ b \geq 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

VII.5 Contre exemple

Si lon veut montrer quune assertion du type « $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$ » est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse. Trouver un tel x cest trouver un contre-exemple à lassertion $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$.

Exemple

Montrer que lassertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».

Remarque

Il existe également le raisonnement par récurrence qui utilise le principe des dominos sur les entiers naturels : il suffit de savoir qu'un domino tombe et que lorsque un domino tombe il fait tomber le suivant pour démontrer que tous les dominos tombent. Ce raisonnement sera étudié en spécialité de terminale.