2025/2026

Loi binomiale

Le mathématicien et physicien hollandais Christian Huygens introduit la notion d'espérance mathématiques dans un livre publié en 1657 et consacré aux probabilités ; c'est le premier ouvrage jamais écrit sur ce thème. Pour nommer ce nouveau concept, il hésite entre les mots latins *spes* et *expectatio* signifiant respectivement *espoir* et *espérance*. Christian Huygens est également célèbre pour ses travaux sur la chute des corps, sur le pendule et pour son invention de l'horloge.

I Rappels

Propriété

- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Exemple

Lors dune épidémie chez des bovins, on sest aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon danimaux dont 2 % est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et dutiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

a. Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
b. Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité quil soit malade ?

II Épreuves indépendantes, successives

Définition

- Etant donné un univers muni d'une probabilité P, on dit que deux événements A et B sont **indépendants** si :
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
- Soit n un entier naturel $n \geq 2$, A_1, A_2, ..., A_n n événements définis sur Ω. On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants**, si
$$\forall I \subset [[1;n]],\ P\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I} P(A_k)$$

Exemple

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Exercice :
On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

a. Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
b. Déterminer la probabilité :
   (a) d'obtenir deux boules blanches ;
   (b) une boule blanche et une boule rouge ;
   (c) au moins une boule blanche.

Exemple

On lance un dé puis une pièce de 1 euro et on note à chaque fois le résultat.
Le résultat du lancer du dé n'influe pas sur le résultat du lancer de la pièce.
Lunivers de la première épreuve est $\{1;2;3;4;5;6\}$ et celui de la deuxième épreuve est $\{Pile\ ;\ Face\}$.
Les issues de lexpérience aléatoire sont (1 ; Pile), (1 ; Face), (2 ; Pile), (2 ; Face), , (6 ; Pile), (6 ; Face)

Exemple

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'événement " On tire un roi ".
Soit T l'événement " On tire un trèfle "

a. Montrer que R et T sont des événements indépendants.
b. On ajoute deux jokers au jeu de cartes. Les événements R et T sont-ils indépendants ?

Exemple

Dans une population, un individu est atteint par la maladie a avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie b avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit A l'événement " L'individu a la maladie a ".
Soit B l'événement " L'individu a la maladie b ".
On suppose que les événements A et B sont indépendants

a. Calculer la probabilité quun individu soit atteint par les deux maladies.

b. Calculer $P(A \cup B)$ et interpréter le résultat.

III Loi de Bernoulli

Définition

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire qui admet deux issues, l'une étant appelée arbitrairement « le succès », l'autre « l'échec ».
- Généralement, on désignera le succès par la lettre S et on notera $P(S) = p$. De plus, l'échec sera désigné par $\overline{S}$. On a alors $P(\overline{S}) = 1 - p$.
- On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** lorsque X prend la valeur 1 avec une probabilité p et prend la valeur 0 avec une probabilité $1 - p$.

Exemple

- Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "obtenir pile" et comme échec "obtenir face". Ici $p = \frac{1}{2}$.
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six". Ici $p = \frac{1}{6}$.

Propriété

Espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors :

$$E(X) = p \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$$

Démontrer la propriété précédente.

IV Schéma de Bernoulli, loi binomiale

Définition

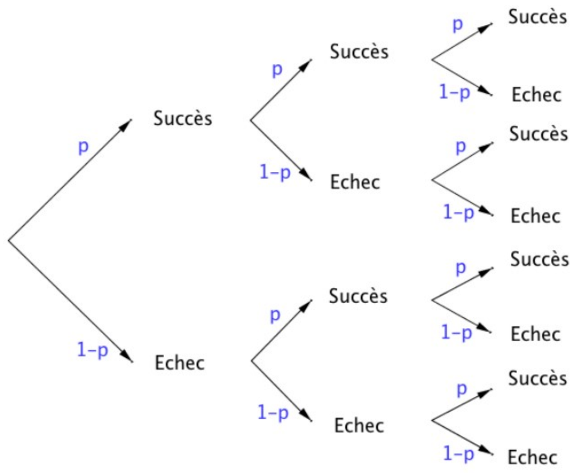
- On dit qu'il y a répétition d'expériences aléatoires **identiques** lorsqu'une même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois, dans les mêmes conditions.
- Des expériences aléatoires sont dites **indépendantes** lorsque le résultat de l'une quelconque d'entre elles est indépendant du résultat des autres expériences.

Définition

- On appelle **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p, toute répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.
- Soit n, k des entiers naturels. On appelle coefficient binomial, on note $\binom{n}{k}$ et on lit « k parmi n »le nombre de chemins comportant k succès parmi n épreuves répétées dans un schéma de Bernoulli.

Exemple

La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{2}$
n et p sont les paramètres de la loi binomiale et que lon note $B(n; p)$.
On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



Dans cette exemple, $P(X = 3) = p \times p \times p = p^3$. En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès.
On a également :
$P(X = 1) = p \times (1-p) \times (1-p) + (1-p) \times p \times (1-p) + (1-p) \times (1-p) \times p = 3p(1-p)^2$
En effet, les chemins permettant la réalisation de 1 succès sont SEE, ESE et EES.

Remarque

Pour tout entier naturel n :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{n} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = n$$

- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès parmi n épreuves : (Échec, Échec, , Échec)
- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à n succès parmi n épreuves : (Succès, Succès, , Succès)
- Il n'y a n chemins correspondant à 1 succès parmi n épreuves : (Succès, Échec, Échec, , Échec) (Échec, Succès, Échec, , Échec) (Échec, Échec, Succès, , Échec) (Échec, Échec, Échec, , Succès)

IV.1 Utilisation de la calculatrice

On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.

a. Quelle est la loi suivie par X ?

b. Calculer la probabilité $P(X = 5)$

c. Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$

d. Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$

e. Représenter graphiquement la loi suivie par X par un diagramme en bâtons.

Pour répondre aux questions b, c, d et e, il faudra lire le manuel de votre calculatrice ou faire quelques recherches.

Théorème

Soit n et p deux entiers naturels non nuls, $0 \leq k \leq p$. On suppose que X suit une loi $B(n;p)$. Alors, $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Notons X la variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n;p)$. Soit $k \in [[0;n]]$, l'événement $\{X = k\}$ est la réunion de tous les produits cartésiens constitués uniquement de k succès et $(n-k)$ échecs comme par exemple :

$$A = S \times S \times .... \times \overline{S} \times \overline{S}$$

On a donc $P(A) = p^k \times (1-p)^{n-k}$

Pour les autres événements constituant $\{X = k\}$, seul l'ordre d'apparition des succès et des échecs change. Il faut donc prendre en considération le nombre de choix de places possible pour les k succès parmi les n tentatives.

Finalement, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Propriété

Espérance et écart-type d'une loi binomiale : Si X suit une loi $B(n;p)$ alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Exemple

On lance 5 fois un dé à six faces. On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès.

Calculer l'espérance et l'écart type. Interpréter le résultat obtenu.

Exemple

Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

a. Montrer que X suit une loi binomiale
b. Déterminer la loi de probabilité de X
c. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.