Version 250925

LABOR ET DILECTIO — PAU 1884

2025/2026

Suites numériques

Archimède est avec **Euclide** le plus grand mathématicien de l'Antiquité. Il vivait à Syracuse en Sicile. Sa découverte du principe ou de la poussée d'Archiméde est souvent racontée de façon romancée. On sait moins qu'il fut le premier à utiliser des suites convergentes. Pour calculer une valeur approchée du nombre π il inscrit et circonscrit au cercle des polygones ayant de plus en plus de côtés, jusqu'à 96. Il calcule de même l'aire englobée par un arc de parabole et fait converger une suite géométrique pour obtenir le résultat.

I Généralités sur les suites de nombres réels

Définition

Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel associe le réel $u(n)$, noté u_n. Cette suite se note u, (u_n), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$
Vocabulaire : u_n est appelé le **terme général** de la suite (u_n) ou le terme de rang n (d'indice n). u_0 est appelé le terme initial de la suite (u_n).

Définition

- Lorsqu'une suite est donnée par son terme général u_n exprimé en fonction de n indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie sous **forme explicite**.
- Lorsqu'une suite est donnée par son premier terme et une relation exprimant chaque terme en fonction du précédent, on dit que la suite est définie par une **relation de récurrence.**

II Suites classiques

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que :
- u est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
- u est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{R}$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$
- u est **arithmético-géométrique** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, appelé raison, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$

Remarque

Les suites arithmétiques et géométriques sont des cas particuliers de suites arithmético-géométriques.

Propriété

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
- Si u est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0+nr$.
- Si u est la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0\times q^n$.

Propriété

Somme des premiers termes d'une suite géométrique : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice 1 :

Démontrer la propriété précédente

Exercice 2 :

Calculer les sommes ci-dessous :

a. $S = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^13$

b. $S = 4 + 16 + ... + 256$

III Généralités et limite d'une suite

Définition

Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante :
- u est croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$
- u est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$

Exemple

Etudier la monotonie des suites suivantes :
- $u_{n+1} = u_n - 2$ avec $u_0 = 34$
- $u_n = \dfrac{1+n}{2+n}$ (utiliser la fonction associée)
- $u_n = 0.5 \times 0.2^n$
- $u_{n+1} = 2u_n - 7$ avec $u_0 = 10$ (utiliser un raisonnement par récurrence).

Définition

Soit (u_n) une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.
- u est majorée : $\exists\ M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$
- u est minorée : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$
- u est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$ et $u_0 = 1$. En calculant les premiers termes de cette suite à la calculatrice, conjecturer l'existence d'un minorant et d'un majorant pour la suite. Démontrer votre conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie sur $\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que
- (u_n) **admet ℓ pour limite**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, si tout intervalle ouvert centré sur ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- (u_n) **admet $+\infty$ pour limite**, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- (u_n) **admet $-\infty$ pour limite** , et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$ (avec $A \in \mathbb{R}$) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Lorsqu'elle existe, la limite de la suite (u_n) est **unique**.

Remarque

Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite **converge** vers ℓ.
Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, on dit que la suite **diverge** vers $\pm\infty$.
Une suite qui n'admet aucune limite est une suite divergente. Par exemple, $u_n = (-1)^n$ diverge.

Exemple

Dire intuitivement, si les suites ci-dessous sont convergentes ou divergentes, préciser leur limite :

a. $u_n = n^2$

b. $u_n = n$

c. $u_n = \dfrac{1}{n}$

d. $u_n = \dfrac{1}{n} + 3$

e. $u_n = \sqrt{n-2}$

f. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}}$

IV Opérations sur les limites

Théorème

Somme de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$

Soit ℓ, la limite de la suite (u_n), et ℓ' la limite de la suite (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell' = +\infty$	$\ell' = -\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**FI**
$\ell = -\infty$	$-\infty$	**FI**	$-\infty$

Produit de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$

Soit ℓ, la limite de la suite (u_n), et ℓ' la limite de la suite (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\ell' = 0$	$\ell' = \pm\infty$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\ell \times \ell'$	0	$\pm\infty$
$\ell = 0$	0	0	**FI**
$\ell = \pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**	$\pm\infty$

Quotient de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n}$

Soit ℓ, la limite de la suite (u_n), et ℓ' la limite de la suite (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}^*$	$\ell' = 0$	$\ell' = \pm\infty$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{\ell'}{\ell}$	0	$\pm\infty$
$\ell = \pm\infty$	0	0	**FI**
$\ell = 0$	$\pm\infty$	**FI**	$\pm\infty$

FI est une forme indéterminée.
$\pm\infty$ se détermine à l'aide de la règle des signes.

Exemple

Exercice 1

Donner les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + n$ b. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1)$ c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{-n^2 - 3}$

Exercice 2

Donner les limites suivantes **méthodes à retenir par la suite** :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 5n + 1$ b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 9n + 1}{2n^3 +_n -1}$ c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

V Limites et comparaison

Théorème

Passage à la limite dans une inégalité : Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant des limites.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leq \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n < \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ alors $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème

Théorème de comparaison : Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang N, on ait $u_n \leq v_n$.

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

❤ Démonstration ❤

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et on montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ il existe un entier N' tel que pour tout $n \geq N'$, $u_n > A$.
On pose n_0 =max$\{N, N'\}$ et on considère un entier $n \geq n_0$, on a donc :

$$v_n \geq u_n$$

$$u_n \geq A$$

$$v_n \geq u_n \geq A$$

Ainsi l'intervalle ouvert $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs v_n à partir d'un certain rang, quel que soit $A \in \mathbb{R}$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
On montre de même l'autre point.

Théorème

Théorème d'encadrement ou « des gendarmes » : Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites de réels telles qu'à partir d'un certain rang N, on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$

Soit l'intervalle ouvert $I =]\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon[$ avec $\epsilon > 0$.

- Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ l'entier à partir duquel $\forall n > n_1,\ u_n \in I$.
- Soit $n_2 \in \mathbb{N}$ l'entier à partir duquel $\forall n > n_2,\ w_n \in I$.
- Soit $n_3 \in \mathbb{N}$ l'entier à partir duquel $\forall n > n_3,\ u_n \leq v_n \leq w_n$.

Soit $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. A partir du rang n_0, on a donc $u_n \in I$, $w_n \in I$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$. D'où $v_n \in I$.
$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0,\ v_n \in]\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon[$. Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$

Démonstration

Exemple

A l'aide des théorèmes précédents, déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{\sin(n)}{n}$

Théorème de convergence monotone : soit (u_n) une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.

- Si (u_n) est croissante et majorée alors elle converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée alors elle converge.

Théorème

Soit (u_n) une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.

- Si (u_n) est croissante et non majorée alors elle diverge.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée alors elle diverge.

Théorème

- Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.
  Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) est non majorée, il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$.
  Ainsi, pour tout réel A, l'intervalle ouvert $]A ; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang n_0.
  D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Soit (u_n) une suite décroissante et non minorée. Alors la suite $(-u_n)$ est croissante et non majorée. D'après la première partie, $\lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

♥ Démonstration ♥

Soit (u_n) une suite de réels définie sur $\mathbb{N}$.

- Si (u_n) est croissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell$
- Si (u_n) est décroissante et admet pour limite ℓ, alors pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ell$

Théorème

Nous allons démontrer ce théorème par l'absurde en supposant le contraire : $\exists \rho \in \mathbb{N},\ u_\rho > \ell$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n > n_\epsilon,\ \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$.
On pose $\epsilon = u_\rho - \ell$. Donc $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n > n_\epsilon,\ 2\ell - u_\rho \leq u_n \leq u_\rho$
On a donc en particulier : $\forall n > n_\epsilon,\ u_n \leq u_\rho$
Or la suite (u_n) est croissante, donc $\forall n > \rho,\ u_n > u_\rho$.
Ceci est une contradiction, on en déduit donc que l'hypothèse de départ est fausse.

Démonstration

VI Limites des suites géométriques

Théorème

Limite d'une suite géométrique : Soit la suite (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_0 :

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) diverge vers $u_0 \times \infty$: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0 \times \infty$
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge vers 0 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Si $q \leq -1$ la suite (u_n) n'admet pas de limite.

❤ Démonstration ❤

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de l'inégalité de Bernouilli : soit un nombre a positif

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$$

Étudions le comportement d'une suite géométrique de raison q :

- Supposons $q > 1$. On pose $q - 1 = a$ de sorte que $q = 1 + a$. On a donc :

  $$(1+a)^n \geq 1 + na \iff q^n \geq 1 + na$$

  Or $a > 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Supposons $0 < q < 1$. On pose $q' = \dfrac{1}{q} > 1$ et on étudie la suite de raison q'. D'après le cas précédent, comme $q' > 1$, la suite diverge vers $+\infty$. Donc d'après les règles d'opérations sur les limites $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Les cas $q = 0$ et $q = 1$ sont des cas de suites constantes dont les limites sont évidentes.
- Le cas $q = -1$ correspond à une suite dont les valeurs alternent entre 1 et -1. La suite n'a donc aucune limite.
- Supposons $q < -1$. Alors $q^{2n} = (q^2)^n$ est une suite de raison $q^2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^2 n = +\infty$.
  $q \times q^{2n} = q^{2n+1} < 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{2n+1} = -\infty$.
  La suite (q^n) n'admet donc aucune limite.

Exemple

Donner la limites des suites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} (\dfrac{1}{3})^n$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + 0,5^n)$

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n}{3}$

e. $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + 3 \times (\dfrac{1}{5})^n$

f. $\lim\limits_{n \to +\infty} 1^n + 7$

Théorème

Somme des termes d'une suite géométrique : soit la suite (u_n) une suite géométrique de raison strictement positive q vérifiant $0 < q < 1$. Alors la somme des n premiers termes de la suite tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0}{1-q}$$

Algorithme de seuil :

a. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 4u_n$ avec $u_0 = 2$ est monotone.

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner alors sa forme explicite.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ou divergente ?

d. Écrire un algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel la suite (u_n) de limite infinie est supérieure à un nombre réel A.