



DÉRIVATION (POUR LE BAC)

I Notion de limite en 0 d'une fonction

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$. Cette fonction n'est pas définie en 0, on ne peut donc pas calculer d'image de 0 par la fonction f .

Nous allons alors nous intéresser aux valeurs prises par f lorsque x devient très proche de 0.

Calculer les images suivantes à l'aide de votre calculatrice :

- $f(0,01) =$
- $f(0,001) =$
- $f(0,0001) =$
- $f(-0,01) =$
- $f(-0,001) =$
- $f(-0,0001) =$

Que constate t-on lorsque x est très proche de 0 ?

II Nombre dérivé

Soit une fonction f . Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$. Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque le point M se rapproche du point A , le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Ce coefficient directeur s'appelle **le nombre dérivé** de f en a et on le note $f'(a)$.

Le nombre dérivé de f en a est :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en $x = 2$.

On note la dérivé de f en a :

$$f'(a) \quad \text{ou} \quad \dot{x} \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_a$$

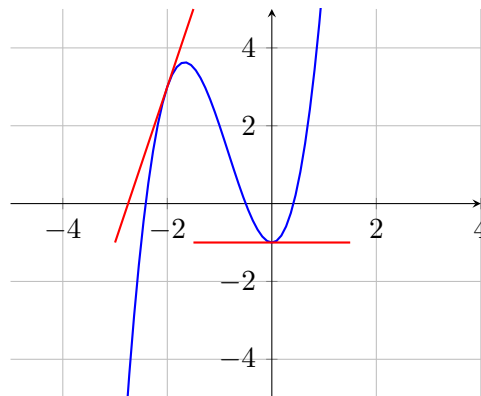
III Notion de tangente

Définition

La tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point A d'abscisse a est la droite :

- Passant par $A(a, f(a))$ (point commun avec C_f)
- De coefficient directeur le nombre $f'(a)$

Ci-contre, on a représenté en rouge les tangentes à C_f au point d'abscisse -2 et au point d'abscisse 0.



Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x + 2$.

- Calculer le nombre dérivé de f au point d'abscisse 2.
- En déduire le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
- Par quel point passe cette tangente ?
- A l'aide du coefficient directeur de la tangente, et du point connu, en déduire un autre point appartenant à la tangente à C_f en 2
- En déduire l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.

Propriété

Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Exemple

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 + x + 1$.

Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse 1.

Remarque

Au voisinage du point de coordonnées $(a; f(a))$, la tangente est une approximation affine de la courbe représentative de f . Cela signifie que l'équation de la tangente permet d'obtenir des valeurs approchées d'images par f pour des valeurs proches de a .

Dans l'exemple précédent, calculer une approximation de la fonction f au point d'abscisse 1,01.

Calculer enfin $f(1,01)$ puis comparer les deux nombres.

IV La fonction dérivée

La fonction qui à tous réels x associe le nombre dérivé de f en x est appelée la fonction dérivée de f et se note f' .

Définition

V Dérivées usuelles

Fonction f	Ensemble de définition	Dérivée f'	Ensemble de définition
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = a$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^3$	\mathbb{R}	$f'(x) = 3x^2$	\mathbb{R}

La dérivée d'une fonction du type $k \times f(x)$ est $k \times f'(x)$.
La dérivée de la somme est la somme des dérivées : $(u + v)' = u' + v'$.
Exemple : $(3x^2 + 2)' = 3 \times 2 \times x + 0 = 6x$

Remarque

Exemple

Dériver les fonctions suivantes après avoir précisé l'intervalle sur lequel la fonction est définie et dérivable :

a. $f(x) = 3x$

c. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

e. $f(x) = -3x^2 + 3x - 1$

b. $f(x) = 5x + 5$

d. $f(x) = 6x^3 + x^2 + 1$

f. $f(x) = -5x^5 - 4x^3 + x^2$

VI Étude des variations d'une fonction

Soit une fonction f définie sur I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

Théorème

Exemple

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

- Calculer la fonction dérivée de f .
- Déterminer le signe de f' en fonction de x
- Dresser le tableau de variations de f .

VII Les extremums d'une fonction : maximum et minimum

Théorème

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I .

Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum local en $x = c$.

Exemple

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^2 - 2x + 4$ admet-elle un extremum sur \mathbb{R} ?