



Exercices

NOMBRES COMPLEXES 2

Exercice 1/30

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

- | | | |
|-----------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. $z = 1 + i$ | 3. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ | 5. $z = -4 + 5i$ |
| 2. $z = 3 - 2i$ | 4. $z = -2 - 5i$ | 6. $z = -\sqrt{5} - 2i\sqrt{3}$ |

Exercice 2/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -i$ et $z_C = -2 + i$.

1. Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} .
2. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer l'affixe du centre I du parallélogramme $ABCD$.

Exercice 3/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 3i$, $z_c = -2 + 2i$ et $z_D = -1$.

1. Calculer z_{AB} et z_{DC} .
2. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 4/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = -2i$, $z_c = -2$. Soit \mathcal{C} le cercle de centre A passant par B .

1. Calculer le rayon R du cercle \mathcal{C} .
2. Vérifier que le point C appartient au cercle \mathcal{C} .

Exercice 5/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B d'affixes respectives : $z_A = 2 - i$, $z_B = 2i$.

1. Déterminer de manière algébrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation $|z - z_A| = 3$.
2. Déterminer de manière géométrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation

$$|z - z_A| = 3.$$

3. Déterminer de manière algébrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation $|z - z_A| = |z - z_B|$.
4. Déterminer de manière géométrique, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'équation $|z - z_A| = |z - z_B|$.

Exercice 6/30

Résoudre dans \mathbb{C} les équations par deux méthodes :

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $ z - 3 + 2i = 5$ | 4. $ z - 3 + 2i = z - i $ |
| 2. $ z + 2 + i = 1$ | 5. $ z + 2 + i = 5 + 2i - z $ |
| 3. $ 2z + 1 - i\sqrt{3} = 4$ | 6. $ 2z + 1 - i\sqrt{3} = 2 z + \sqrt{3} - i $ |

Exercice 7/30

Soient z_1 et z_2 deux éléments de \mathbb{U} et n un entier naturel.

Démontrer que :

- | | |
|---|--|
| 1. $z_1 z_2$ est un élément de \mathbb{U} . | 5. $\frac{z_2}{z_1}$ est un élément de \mathbb{U} . |
| 2. z_1^n est un élément de \mathbb{U} . | 6. $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n$ est un élément de \mathbb{U} . |
| 3. Vérifier que $z_1 \neq 0$ | |
| 4. $\frac{1}{z_1}$ est un élément de \mathbb{U} . | |

Exercice 8/30

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

- | | | |
|-----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1. $z = (1+i)(2-3i)$ | 3. $z = (\sqrt{5}+i)^2$ | 5. $z = (6+8i)^2(8-6i)^3$ |
| 2. $z = \frac{-1+3i}{2-3i}$ | 4. $z = (5i-7)(2+7i)(2-i)$ | 6. $z = \frac{-3-6i}{1+i}$ |

Exercice 9/30

Déterminer (sans calcul) un argument des nombres complexes suivants :

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 4. $z = \sqrt{5}$ | 7. $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 2. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 5. $z = 7i$ | 8. $z = -9$ |
| 3. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 6. $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 9. $z = -2i$ |

Exercice 10/30

Calculer un argument des nombres complexes suivants :

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $z = 1+i$ | 3. $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ | 5. $z = -5 - 5i$ |
| 2. $z = \sqrt{3} + i$ | 4. $z = -1 + i\sqrt{3}$ | 6. $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ |

Exercice 11/30

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

1. $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

6. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7$

7. $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

3. $z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8. $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$

4. $z = (\sqrt{5})^4$

9. $z = (-9)^7$

5. $z = (7i)^2$

10. $z = (-2i)^9$

Exercice 12/30

Écrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique :

1. $z = -2$

4. $z = -\frac{1}{3}(1 - i\sqrt{3})$

7. $z = \frac{\sqrt{2}}{5} + i\frac{\sqrt{2}}{5}$

2. $z = 1 + i$

5. $z = -5i$

8. $z = -4 + 4i$

3. $z = 2\sqrt{3} - 2i$

6. $z = i\sqrt{3}$

9. $z = -5 - 5i$

Exercice 13/30

Écrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique :

1. $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$

6. $z = \sin \theta + i \cos \theta$

2. $z = -i\sqrt{5}$

7. $z = -2i$

3. $z = \sqrt{2}$

8. $z = -3(\sin \theta + i \cos \theta)$

4. $z = -9$

5. $z = -2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$

9. $z = -i\sqrt{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) - i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

Exercice 14/30

Écrire les expressions suivantes sous formes algébrique :

1. $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

3. $z = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$

5. $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. $z = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$

4. $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

6. $z = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Exercice 15/30

Écrire les expressions suivantes sous formes exponentielle :

1. $z = -2$

4. $z = -\frac{1}{3}(1 - i\sqrt{3})$

7. $z = \frac{\sqrt{2}}{5} + i\frac{\sqrt{2}}{5}$

2. $z = 1 + i$

5. $z = -5i$

8. $z = -4 + 4i$

3. $z = 2\sqrt{3} - 2i$

6. $z = i\sqrt{3}$

9. $z = -5 - 5i$

Exercice 16/30

Écrire les expressions suivantes sous formes exponentielles :

1. $z = i(3 + i\sqrt{3})$
2. $z = -2(3 + i\sqrt{3})$
3. $z = i\sqrt{2}(3 - i\sqrt{3})$
4. $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3ie^{i\frac{\pi}{5}}$
5. $z = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$
6. $z = -i \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right)$
7. $z = -2ie^{-i\frac{\pi}{5}} \times 3e^{i\frac{5\pi}{7}} \times \sqrt{3}e^{-i\pi}$

Exercice 17/30

1. Développer et simplifier $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$.
2. En déduire que $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{8} \cos x$.
3. Développer et simplifier $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$.
4. En déduire la linéarisation de $\sin^3 x$.

Exercice 18/30

Linéariser les expressions suivantes :

$$1. f(x) = \cos(x) \sin^3(x) \quad 2. g(x) = \cos^2(5x) \cos(7x) \quad 3. h(x) = \cos^3(x) \sin^3(x)$$

Exercice 19/30

Soit le nombre complexe $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Donner la valeur exacte de $(z)^{2022}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Exercice 20/30

Soit A , B et C les points du plan complexe d'affixes $z_A = 2$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$. L'objectif de cet exercice est de démontrer que le triangle ABC est équilatéral par deux méthodes.

1. Calculer $|z_B - z_A|$, $|z_B - z_C|$ et $|z_C - z_A|$. Conclure.
2. Calculer $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$. Conclure.

Exercice 21/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le point M d'affixe $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, le point P d'affixe $z_1 = \frac{1}{z}$ et le point P' , d'affixe z_2 , symétrique de P par rapport à l'axe imaginaire.

1. Donner la forme algébrique et la forme exponentielle des nombres z , z_1 et z_2 .
2. Soit Q le point d'affixe $z' = \frac{4}{3}(z_1 + z_2)$.
Démontrer que les points M , P et Q sont alignés.

Exercice 22/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = -1 - i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 2 - 2i$.

1. Calculer les nombres complexes $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ et $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$.
2. En déduire la nature des triangles ACD et BCD .
3. Montrer que les points A , B , C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 23/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes $z_A = -2$ et $z_B = i$, et pour $z \neq i$, M et M' d'affixes z et z' avec $z' = \frac{z+2}{z-i}$.
Déterminer :

1. L'ensemble des points M tels que $OM' = 1$.
2. L'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe réel.
3. L'ensemble des points M tels que M' soit sur l'axe imaginaire.

Exercice 24/30

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z| = 2|z - i|$.

Exercice 25/30

Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta}$

1. Démontrer que $z^6 = -1 \iff \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{6}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $z^6 = -1$.

Exercice 26/30

Déterminer les nombres complexes z tels que $z^3 = i$.

Exercice 27/30 : Vrai/Faux

1. En notant A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = -3 + 2i$, on a $AB = 4$.
2. Les points A , B et C d'affixes respectives $z_1 = 3 + 6i$, $z_B = 7 + 18i$ et $z_C = -1 - 6i$ sont alignés.
3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - i| = |z + i|$ est l'axe des ordonnées.
4. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 1 + 3i| = 4$ est un cercle.
5. Le module d'une racine n -ième de l'unité est égal à 1.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n racines n -ième de l'unité distinctes.

7. Les racines troisièmes de l'unité sont 1, $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
 8. Les points d'affixe 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ forment un triangle équilatéral.

Exercice 28/30

Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes

1. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 29/30

Calculer de deux façons le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{12}$.

1. En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.
2. En écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}$.
3. Y a-t-il incohérence dans les résultats des deux questions précédentes ?

Exercice 30/30 : Vrai/Faux

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(2\theta) = 2\sin\theta$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1.
4. L'exponentielle imaginaire $e^{i\theta}$ est toujours un nombre non réel.
5. Pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
6. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$.
7. -5 s'écrit sous forme exponentielle $-5e^{i0}$.
8. L'écriture sous forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est unique.
9. $\left(4\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^3 = 4\cos\frac{3\pi}{8} + 4i\sin\frac{3\pi}{8}$.
10. $(1 + i\sqrt{3})^6$ est un nombre réel.
11. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} + 1 = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\theta}{2}$