



## Exercices

## NOMBRES COMPLEXES 2

**Exercice 1/30**

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

- |                 |                               |                                 |
|-----------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. $z = 1 + i$  | 3. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ | 5. $z = -4 + 5i$                |
| 2. $z = 3 - 2i$ | 4. $z = -2 - 5i$              | 6. $z = -\sqrt{5} - 2i\sqrt{3}$ |

**Exercice 2/30**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes  $z_A = 3 + 2i$ ,  $z_B = -i$  et  $z_C = -2 + i$ .

- Déterminer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
- Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que  $ABCD$  soit un parallélogramme.
- Déterminer l'affixe du centre  $I$  du parallélogramme  $ABCD$ .

**Exercice 3/30**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives :  $z_A = 2 + i$ ,  $z_B = 1 + 3i$ ,  $z_C = -2 + 2i$  et  $z_D = -1$ .

- Calculer  $z_{AB}$  et  $z_{DC}$ .
- En déduire la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

**Exercice 4/30**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C$  d'affixes respectives :  $z_A = 1 + i$ ,  $z_B = -2i$ ,  $z_C = -2$ . Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A$  passant par  $B$ .

- Calculer le rayon  $R$  du cercle  $\mathcal{C}$ .
- Vérifier que le point  $C$  appartient au cercle  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 5/30**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  d'affixes respectives :  $z_A = 2 - i$ ,  $z_B = 2i$ .

- Déterminer de manière algébrique, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant l'équation  $|z - z_A| = 3$ .
- Déterminer de manière géométrique, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant l'équation

$$|z - z_A| = 3.$$

3. Déterminer de manière algébrique, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant l'équation  $|z - z_A| = |z - z_B|$ .
4. Déterminer de manière géométrique, l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant l'équation  $|z - z_A| = |z - z_B|$ .

### Exercice 6/30

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations par deux méthodes :

1.  $|z - 3 + 2i| = 5$
2.  $|z + 2 + i| = 1$
3.  $|2z + 1 - i\sqrt{3}| = 4$
4.  $|z - 3 + 2i| = |z - i|$
5.  $|z + 2 + i| = |5 + 2i - z|$
6.  $|2z + 1 - i\sqrt{3}| = 2|z + \sqrt{3} - i|$

### Exercice 7/30

Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux éléments de  $\mathbb{U}$  et  $n$  un entier naturel.

Démontrer que :

1.  $z_1 z_2$  est un élément de  $\mathbb{U}$ .
2.  $z_1^n$  est un élément de  $\mathbb{U}$ .
3. Vérifier que  $z_1 \neq 0$
4.  $\frac{1}{z_1}$  est un élément de  $\mathbb{U}$ .
5.  $\frac{z_2}{z_1}$  est un élément de  $\mathbb{U}$ .
6.  $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n$  est un élément de  $\mathbb{U}$ .

### Exercice 8/30

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

1.  $z = (1 + i)(2 - 3i)$
2.  $z = \frac{-1 + 3i}{2 - 3i}$
3.  $z = (\sqrt{5} + i)^2$
4.  $z = (5i - 7)(2 + 7i)(2 - i)$
5.  $z = (6 + 8i)^2(8 - 6i)^3$
6.  $z = \frac{-3 - 6i}{1 + i}$

### Exercice 9/30

Déterminer (sans calcul) un argument des nombres complexes suivants :

1.  $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
2.  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
3.  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
4.  $z = \sqrt{5}$
5.  $z = 7i$
6.  $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
7.  $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
8.  $z = -9$
9.  $z = -2i$

### Exercice 10/30

Calculer un argument des nombres complexes suivants :

1.  $z = 1 + i$
2.  $z = \sqrt{3} + i$
3.  $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
4.  $z = -1 + i\sqrt{3}$
5.  $z = -5 - 5i$
6.  $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$

**Exercice 11/30**

Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

1.  $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
2.  $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7$
3.  $z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4.  $z = (\sqrt{5})^4$
5.  $z = (7i)^2$
6.  $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
7.  $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$
8.  $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$
9.  $z = (-9)^7$
10.  $z = (-2i)^9$

**Exercice 12/30**

Écrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique :

1.  $z = -2$
2.  $z = 1 + i$
3.  $z = 2\sqrt{3} - 2i$
4.  $z = -\frac{1}{3}(1 - i\sqrt{3})$
5.  $z = -5i$
6.  $z = i\sqrt{3}$
7.  $z = \frac{\sqrt{2}}{5} + i\frac{\sqrt{2}}{5}$
8.  $z = -4 + 4i$
9.  $z = -5 - 5i$

**Exercice 13/30**

Écrire les expressions suivantes sous la forme trigonométrique :

1.  $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$
2.  $z = -i\sqrt{5}$
3.  $z = \sqrt{2}$
4.  $z = -9$
5.  $z = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
6.  $z = \sin\theta + i\cos\theta$
7.  $z = -2i$
8.  $z = -3(\sin\theta + i\cos\theta)$
9.  $z = -i\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

**Exercice 14/30**

Écrire les expressions suivantes sous formes algébrique :

1.  $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$
2.  $z = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$
3.  $z = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$
4.  $z = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
5.  $z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$
6.  $z = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

**Exercice 15/30**

Écrire les expressions suivantes sous formes exponentielle :

1.  $z = -2$
2.  $z = 1 + i$
3.  $z = 2\sqrt{3} - 2i$
4.  $z = -\frac{1}{3}(1 - i\sqrt{3})$
5.  $z = -5i$
6.  $z = i\sqrt{3}$
7.  $z = \frac{\sqrt{2}}{5} + i\frac{\sqrt{2}}{5}$
8.  $z = -4 + 4i$
9.  $z = -5 - 5i$

**Exercice 16/30**

Écrire les expressions suivantes sous formes exponentielle :

1.  $z = i(3 + i\sqrt{3})$
2.  $z = -2(3 + i\sqrt{3})$
3.  $z = i\sqrt{2}(3 - i\sqrt{3})$
4.  $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \times 3ie^{i\frac{\pi}{5}}$
5.  $z = 2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$
6.  $z = -i \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right)$
7.  $z = -2ie^{-i\frac{\pi}{5}} \times 3e^{i\frac{5\pi}{7}} \times \sqrt{3}e^{-i\pi}$

**Exercice 17/30**

1. Développer et simplifier  $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$ .
2. En déduire que  $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{8} \cos x$ .
3. Développer et simplifier  $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$ .
4. En déduire la linéarisation de  $\sin^3 x$ .

**Exercice 18/30**

Linéariser les expressions suivantes :

1.  $f(x) = \cos(x) \sin^3(x)$
2.  $g(x) = \cos^2(5x) \cos(7x)$
3.  $h(x) = \cos^3(x) \sin^3(x)$

**Exercice 19/30**

Soit le nombre complexe  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .

Donner la valeur exacte de  $(z)^{2022}$  sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

**Exercice 20/30**

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points du plan complexe d'affixes  $z_A = 2$ ,  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$  et  $z_C = -1 - i\sqrt{3}$ . L'objectif de cet exercice est de démontrer que le triangle ABC est équilatéral par deux méthodes.

1. Calculer  $|z_B - z_A|$ ,  $|z_B - z_C|$  et  $|z_C - z_A|$ . Conclure.
2. Calculer  $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ . Conclure.

**Exercice 21/30**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point  $M$  d'affixe  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ , le point  $P$  d'affixe  $z_1 = \frac{1}{z}$  et le point  $P'$ , d'affixe  $z_2$ , symétrique de  $P$  par rapport à l'axe imaginaire.

1. Donner la forme algébrique et la forme exponentielle des nombres  $z$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .
2. Soit  $Q$  le point d'affixe  $z' = \frac{4}{3}(z_1 + z_2)$ .  
Démontrer que les points  $M$ ,  $P$  et  $Q$  sont alignés.

### Exercice 22/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = -1 + i$ ,  $z_B = -1 - i$ ,  $z_C = 2i$  et  $z_D = 2 - 2i$ .

1. Calculer les nombres complexes  $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$  et  $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$ .
2. En déduire la nature des triangles  $ACD$  et  $BCD$ .
3. Montrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

### Exercice 23/30

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes  $z_A = -2$  et  $z_B = i$ , et pour  $z \neq i$ ,  $M$  et  $M'$  d'affixes  $z$  et  $z'$  avec  $z' = \frac{z+2}{z-i}$ .  
Déterminer :

1. L'ensemble des points  $M$  tels que  $OM' = 1$ .
2. L'ensemble des points  $M$  tels que  $M'$  soit sur l'axe réel.
3. L'ensemble des points  $M$  tels que  $M'$  soit sur l'axe imaginaire.

### Exercice 24/30

Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z| = 2|z - i|$ .

### Exercice 25/30

Soit le nombre complexe  $z = e^{i\theta}$

1. Démontrer que  $z^6 = -1 \iff \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{6}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
2. En déduire les solutions de l'équation  $z^6 = -1$ .

### Exercice 26/30

Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $z^3 = i$ .

### Exercice 27/30 : Vrai/Faux

1. En notant  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives  $z_A = 1 - i$  et  $z_B = -3 + 2i$ , on a  $AB = 4$ .
2. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_1 = 3 + 6i$ ,  $z_B = 7 + 18i$  et  $z_C = -1 - 6i$  sont alignés.
3. L'ensemble des points d'affixe  $z$  tels que  $|z - i| = |z + i|$  est l'axe des ordonnées.
4. L'ensemble des points d'affixe  $z$  tels que  $|z - 1 + 3i| = 4$  est un cercle.
5. Le module d'une racine  $n$ -ième de l'unité est égal à 1.
6. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $n$  racines  $n$ -ième de l'unité distinctes.

7. Les racines troisièmes de l'unité sont  $1$ ,  $e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .
8. Les points d'affixe  $1$ ,  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $e^{i\frac{4\pi}{3}}$  forment un triangle équilatéral.

### Exercice 28/30

Exprimer en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  les expressions suivantes

1.  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  et  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .
2.  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  et  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ .

### Exercice 29/30

Calculer de deux façons le cosinus et le sinus de  $\frac{\pi}{12}$ .

1. En écrivant  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ .
2. En écrivant  $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}$ .
3. Y a-t-il incohérence dans les résultats des deux questions précédentes ?

### Exercice 30/30 : Vrai/Faux

1. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ .
3. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $e^{i\theta}$  est un nombre complexe de module 1.
4. L'exponentielle imaginaire  $e^{i\theta}$  est toujours un nombre non réel.
5. Pour  $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ ,  $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ .
6. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$ .
7.  $-5$  s'écrit sous forme exponentielle  $-5e^{i0}$ .
8. L'écriture sous forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est unique.
9.  $\left(4 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^3 = 4 \cos \frac{3\pi}{8} + 4i \sin \frac{3\pi}{8}$ .
10.  $(1 + i\sqrt{3})^6$  est un nombre réel.
11. Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $e^{i\theta} + 1 = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$ .