Corrigé : Exercices

Continuité

Exercice 1/27

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3]$ par :

$$f(x) = (3-x)\sqrt{3-x}$$

Montrer que l'équation $f(x)=5$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

Solution :

Rappels de 1ere : $(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b)$ et $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

f est continue et dérivable sur $]-\infty;3]$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle.

$f'(x) = -\sqrt{3-x} + (3-x) \times \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{-6+2x-3+x}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{3x-9}{2\sqrt{3-x}}$

$\forall x \in]-\infty;3]$, $\dfrac{3x-9}{2\sqrt{3-x}} \leq 0$

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty;3]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(3)=0$.

La fonction f est monotone sur $]-\infty;3]$ à valeurs dans $[0;+\infty[$, or $5 \in [0;+\infty[$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=5$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

Exercice 2/27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

Étudier la continuité de la fonction f en -2.

Solution :

$\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim\limits_{x\to-2} x-2 = -4$ f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3/27

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x+2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 2-\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } -0 < x \leq 2 \\ x^2-4 & \text{si } -x > 2 \end{cases}$

Exercice 4/27

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Exercice 5/27

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	π	$\searrow$	0

1. A l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, justifier que :
   (a) l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 4]$.
   (b) l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
2. Déterminer, à l'aide du tableau de variation, le nombre de solutions :
   (a) de l'équation $f(x) = 4$,
   (b) de l'équation $f(x) = -2$.
3. Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs du réel m.

Solution :

1. (a) La fonction f est continue, strictement croissante sur $[0; 4]$ et à valeurs dans $[-2; \pi]$.
   Or $0 \in [-2; \pi]$ donc d'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 4]$.
   (b) La fonction f est continue, strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et à valeurs dans $[-2; +\infty[$.
   Or $0 \in [-2; +\infty[$ donc d'après le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty; 0]$.
2. (a) Corollaire TVI 1 solution
   (b) Corollaire TVI 1 solution
3.
   - Si $m > \pi$; 1 unique solution
   - Si $0 < m < \pi$; 3 solutions
   - Si $-2 < m < 0$; 2 solutions
   - Si $m = \pi$; 2 solutions
   - Si $m = 0$; 3 solutions
   - Si $m = -2$; 1 solution
   - Si $m < -2$; 0 solution

Exercice 6/27 : Prolongement par continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3+7x^2+2x-3}{2x-1} & \text{si } x \neq \dfrac{1}{2} \\ \alpha \quad \text{si } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel :
$$2x^3+7x^2+2x-3 = (2x-1)(ax^2+bx+c)$$
2. Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Solution :

1. $2x^3+7x^2+2x-3 = (2x-1)(x^2+4x+3)$
2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)(x^2+4x+3)}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} x^2+4x+3 = \dfrac{21}{4}$
   Donc $\alpha = \dfrac{21}{4}$

Exercice 7/27

1. Montrer que la fonction $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{3x-\cos(x)}{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est continue.
2. Montrer que la fonction $f \ : \ x \longmapsto \sqrt{3-\cos(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue.

Solution :

1. Les fonctions $x \ :\longmapsto 3x$ et $x \ :\longmapsto -\cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$. $x \ :\longmapsto \sqrt{x}$ est continue et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $2 \leq 3-\cos(x) \leq 4$. La racine carrée est donc bien définie. La fonction $x \ :\longmapsto 3-\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues usuelles, et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Or la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8/27

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x < -2 \\ -x^2+1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Solution :

- Sur $]-\infty;-2[$: Sur cet intervalle f est une fonction polynomiale, elle est donc continue.
- Sur $]-2;+\infty[$: Sur cet intervalle f est une fonction polynomiale, elle est donc continue.
- En -2 :
  On calcule $f(-2)$ à l'aide de l'expression $f(-2) = -(-2)^2+1 = -3$.
  On calcule ensuite la limite à gauche $\lim\limits_{x\to-2^-} 3x+5 = -1$
  $\lim\limits_{x\to-2^-} 3x+5 \neq \lim\limits_{x\to-2^+} -x^2+1$.

On en déduit alors que la fonction n'est pas continue en $x = 2$.
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

Exercice 9/27

Montrer que l'équation $e^x + 2x = 2$ admet une solution dans l'intervalle $I = [0; 1]$.

Solution : Soit $f \ : \ x \longmapsto e^x + 2x$ définie sur I. f est continue comme somme de fonctions usuelles continues et vérifie $f(0) = 1$ et $f(1) = e + 2$. Comme 2 est une valeur intermédiaire entre 1 et $(e + 2)$, le TVI permet de conclure.

Exercice 10/27

Soit $g \ : \ x \longmapsto x^3 - 3x - 4$ définie sur $\mathbb{R}$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1; 3]$.

Solution : g est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.
D'après le cours de première, on en déduit que $g'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$. La fonction g est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

- $0 \in [-6; 14]$ avec $g(1) = -6$ et $g(3) = 14$.
- g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 3]$.
- D'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; 3]$.

Exercice 11/27

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que la suite (u_n) et convergente et donner sa limite.

Solution : Soit f la fonction itératrice associée à la suite (u_n). f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x + 2}$. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.
$f'(x) = \dfrac{4(x + 2) - (4x + 3)}{(x + 2)^2} = \dfrac{5}{(x + 2)^2} > 0$
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

Soit pour tout n entier naturel la proposition $P(n)$ suivante : $u_n < u_{n+1} < 3$

Initialisation : rang $n = 0$.
$u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = 2$ La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang $n \geq 0$ et montrons que cela implique $P(n + 1)$ vrai.

$$\begin{aligned} P(n) \text{ vraie } &\iff u_n < u_{n+1} < 3 \\ &\iff f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(3) \\ &\iff u_{n+1} < u_{n+2} < 3 \end{aligned}$$

Conclusion : $P(n)$ vraie $\Longrightarrow P(n + 1)$ vraie. La propriété est donc héréditaire à partir du

rang $n = 0$.
D'après le principe de récurrence : $\forall n \geq 0,\ P(n)$ est vraie.
La propriété est ainsi démontrée.

(u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente vers un réel $\ell \in [-\frac{1}{2};3]$. f est continue sur $[-\frac{1}{2};3]$, ℓ est donc solution de l'équation $\ell = f(\ell)$.
Finalement, $\ell = 3$

Exercice 12/27 : Vrai ou faux

1. Si la fonction f est continue en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe
2. Si la fonction f est continue en x_0, alors f est dérivable en x_0.
3. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Alors il existe un réel $c \in [0;1]$, unique tel que $f(c) = \frac{1}{2}$.
4. La fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ est continue en 0.
5. La fonction inverse n'est pas continue en 0.
6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Alors (u_n) converge vers ℓ tel que $\ell = f(\ell)$.
7. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Alors (u_n) converge vers ℓ tel que $\ell = f(\ell)$.
8. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec f définie sur $\mathbb{R}$. Alors si (u_n) converge, sa limite est l'abscisse d'un point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$.
9. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
10. Si une fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle ne tend pas vers l'infinie en 0 (ni en 0^+ ni en 0^-), alors on peut la prolonger par continuité en 0.

Solution :

1. Vrai
2. Faux $x \longmapsto |x|$
3. Faux $x \longmapsto \sin(2x)$
4. Vrai théorème des gendarmes
5. Faux On ne peut pas parler de continuité pour une fonction non définie en un point.
6. Vrai
7. Faux la suite est divergente vers $+\infty$
8. Vrai
9. Vrai
10. Faux

Exercice 13/27

Pour chaque question, étudier la continuité sur son ensemble de définition de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{4x + \cos(x)}{3x - 1}$
3. $f(x) = 5\sqrt{3x - 1}$

Solution :

1. Continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions...
2. Continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{3}\}$ comme quotient de fonctions...
3. Continue sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$ comme composée...

Exercice 14/27

Soit $f \ : \ \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + 2 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ \sqrt{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Solution : D'une part,
$\lim\limits_{x \to 0^-} -1$
D'autre part,
$\lim\limits_{x \to 0^+} 0$
Les limites à gauche et à droite étant différentes, la fonction ne peut pas être continue en 0.

Exercice 15/27

Soit $g \ : \ \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + \alpha & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Tracer $\mathcal{C}_g$ sur $[-2; 3]$ si $\alpha = 3$; la fonction semble-t-elle continue en 1 dans ce cas ? Déterminer la valeur de α pour que g soit continue en 1.

Solution :

$-1 + \alpha = 1 \iff \alpha = 2$

Exercice 16/27

Soit $h \ : \ \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Déterminer α pour que h soit continue en 0.

Solution : $\alpha = -\dfrac{1}{2}$

Exercice 17/27

Pour tout réel x, il existe un unique entier n (qui dépend de x) tel que $n \leq x < n+1$. On appelle partie entière de x cet entier n et on le note $\lfloor x \rfloor$.
Par exemple : $\lfloor 3,71 \rfloor = 3$ et $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$

1. Représenter la fonction $E \ : \ x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ sur $[-4;4]$.
2. Par définition, pour tout réel x on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
   Montrer que pour tout réel x, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
3. En déduire les limites à l'infinie de la fonction E.
4. Étudier la continuité de la fonction E sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. 

2. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
   D'une part $\lfloor x \rfloor \leq x$ et d'autre part $x < \lfloor x \rfloor + 1$
   Or $x < \lfloor x \rfloor + 1 \iff x - 1 < \lfloor x \rfloor$.
   D'où $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
3. T. des gendarmes :
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$
4. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ et $\lim\limits_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$.
   Pour $x \notin \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor$ est constante donc continue. La fonction partie entière est donc continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

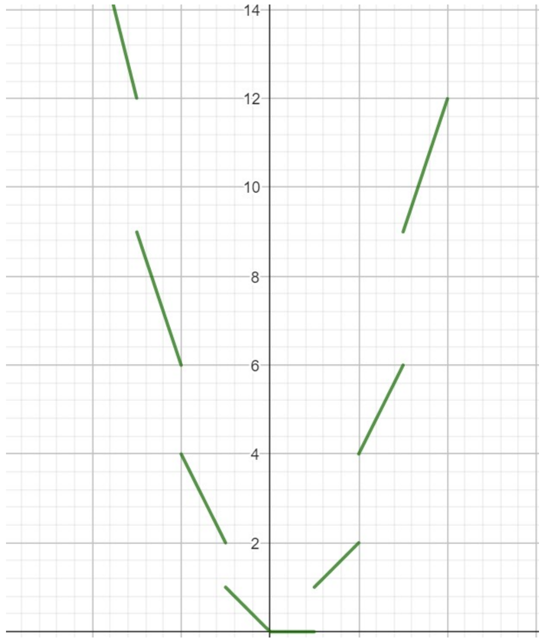
Exercice 18/27

1. Soit $f \ : \ x \longmapsto x \lfloor x \rfloor$.
   (a) Simplifier l'écriture de $f(x)$ lorsque $x \in [i; i+1[$ pour $i \in \{-2; -1; 0; 1\}$.
   (b) Représenter la courbe de f sur $[-2; 2]$.
   (c) Étudier la continuité de f en 0.

2. Étudier la continuité en 0 de $g\ :\ \begin{cases} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Solution :

1. (a) $f(x) = x \times i$

   (b) 

   (c) Continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^-} x\lfloor x \rfloor = \lim\limits_{x \to 0^+} x\lfloor x \rfloor = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = 0 \neq 1$

   $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} = +\infty \neq 1$
   La fonction n'est pas continue en 0.

Exercice 19/27

Soit $f\ :\ [-1;4] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose connu le tableau de variations de f.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1;4]$ et que $\alpha \in [1;4]$.
Dresser le tableau de signes de $f(x)$ en fonction de α.

x	-1	0	1	4
$f(x)$	-5 ↗	-1 ↘	-2 ↗	3

Solution : La fonction f est continue sur $[-1;4]$.
La fonction f est strictement croissante sur $[-1;0]$ à valeurs dans $[-5;-1]$. $0 \notin [-5;-1]$
La fonction f est strictement décroissante sur $[0;1]$ à valeurs dans $[-1;-2]$.$0 \notin [-1;-2]$
La fonction f est strictement croissante sur $[1;4]$ à valeurs dans $[-2;3]$.$0 \in [-2;3]$
Donc d'après le corollaire du TVI, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ sur

l'intervalle $[-1;4]$.

x	-1		α		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 20/27

Soit $f\ :\ x \longmapsto x^3 - 12x - 8$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = -21$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Déterminer, sans calculatrice, un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.
3. Déterminer, avec la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-3} près.

Solution :

1. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x-2)(x+2)$.
   Pour $x \in [-2;2]$, $3(x-2)(x+2) \leq 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.
   De plus, $f(-2) = 8$ et $f(2) = -24$.
   D'après le corollaire du TVI, il existe une unique solution à l'équation $f(x) = -21$ sur l'intervalle $[-2;2]$.

Exercice 21/27

Soit $g : [0;\pi] \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{4}{5}\cos(x)$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0;\pi]$.

Solution : Corollaire du TVI avec étude de la fonction.

Exercice 22/27

On considère l'équation (E) : $\cos(x) = x$ pour $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. Tracer les courbes des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \cos(x)$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Combien l'équation (E) semble-t-elle avoir de solutions sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$?
2. Démontrer que (E) admet une unique solution α sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Préciser si α est supérieur ou inférieur à $\dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.

Solution :

1. Il semble y avoir une unique solution.
2. Corollaire TVI avec $f(x) = \cos(x) - x$
3. $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \approx -0,08$ et $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \approx 0,34$ donc $\dfrac{\pi}{4} > \alpha > \dfrac{\pi}{6}$

Exercice 23/27

1. Soit $f : x \mapsto -2x^3 - x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer le tableau de variations de f.
   (b) Démontrer que l'équation (E) $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; 1[$. Justifier que cette équation n'admet pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$.
   (c) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : x \mapsto x^2 + x + \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g.

Solution :

1. (a)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

   (b) Corollaire TVI
   (c) $\forall x \in]-\infty; \alpha], \; f(x) \geq 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, \; f(x) < 0$
2. (a) $g'(x) = 2x + 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2} = -\dfrac{f(x)}{x^2}$
   (b)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 24/27

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de $g(x) = (x + 2)e^x - 1$
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g. Préciser le minimum de g sur $\mathbb{R}$
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-3; 0]$. Justifier que l'équation n'admet pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$. Préciser un encadrement de α à 10^{-3} près.
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de α.
3. Déterminer les limites de f à l'infini.
4. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.
5. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$.

Solution :

1. $f'(x) = x \times g(x)$
2. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$

   (b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-3} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) Corollaire TVI : $-0.694 < \alpha < -0,693$

   (d) si $x \in]-\infty; \alpha]$ alors $g(x) \leq 0$ et si $x \in]\alpha; +\infty[$ alors $g(x) > 0$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
4.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. $f(\alpha) = \alpha^2 \times e^{\alpha} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 \times (e^{\alpha} - \dfrac{1}{2})$

   Or $g(\alpha) = 0$ donc $(\alpha + 2)e^{\alpha} - 1 = 0$ donc $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha + 2}$

   D'où $f(\alpha) = \alpha^2 \times (\dfrac{1}{\alpha + 2} - \dfrac{1}{2}) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$

Exercice 25/27

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{5u_n - 12}{u_n - 2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer f telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier les variations de f.
2. Démontrer que si $x \in [4; +\infty[$, alors $f(x) \in [4; +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4 \leq u_n$.
4. En raisonnant par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1..
5. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{5x - 12}{x - 2}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{2\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.

   $f'(x) = \dfrac{5(x-2) - (5x - 12)}{(x-2)^2} = \dfrac{2}{(x-2)^2} > 0$

   La fonction f est croissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.
2. Soit $x \geq 4$ alors par croissance de la fonction f, $f(x) \geq f(4)$ donc $f(x) \geq 4$.
3. Récurrence simple

4. Récurrence simple initialisée au rang 1.
5. Minorée + décroissante = convergente **Théorème de convergence monotone**.
6. f est continue sur $[4;+\infty[$ à valeurs dans $[4;+\infty[$. Soit ℓ la limite de la suite (u_n), elle vérifie alors $\ell = f(\ell)$.
   $\ell = \dfrac{5\ell-12}{\ell-2} \iff \ell(\ell-2) = 5\ell - 12 \iff \ell^2 - 7\ell + 12 = 0$
   D'où $\ell = 4$ (la solution $\ell = 3$ ne convient pas car $\forall n \geq 1,\ u_n \geq 4$).

Exercice 26/27

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$.
   (a) Déterminer la tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
   (b) Soit $J = [0;1]$. Montrer que si $x \in J$ alors $f(x) \in [0;1]$.
   (c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f sur $[0;2]$ dans un repère orthogonal d'unités 4 cm en abscisses et 8 cm en ordonnées.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Représenter graphiquement u_0, u_1 et u_2 sur le dessin précédent.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in J$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Solution :

1. (a)

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		e^{-1}	
	0		0

   (b) Soit un réel x tel que $0 \leq x \leq 1$ alors par croissance et continuité de la fonction f sur $[0;+\infty[$, $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ donc $0 \leq f(x) \leq e^{-1}$ or $e^{-1} \leq 1$ d'où $0 \leq f(x) \leq 1$.
   (c) Courbe
2. (a) Courbe
   (b) Récurrence simple
   (c) Récurrence simple
   (d) Décroissance + minorée = convergente **Théorème de convergence monotone**.
   f est continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$. Soit ℓ la limite de la suite (u_n), elle vérifie alors $\ell = f(\ell)$.
   $\ell = \ell e^{-\ell}$
   D'où $\ell = 0$.

Exercice 27/27

1. $f\ :\ x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$ définie sur $[-4;+\infty[\backslash\{5\}$ est-elle prolongeable par continuité en 5 ?
2. $g\ :\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;-1\}$ est-elle prolongeable par continuité en -2 et en -1 ?

Solution :

1. La fonction f est continue sur $[-4;+\infty[\backslash\{5\}$ comme composée et quotient de fonctions continues sur cet intervalle.
   $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to5^-} \dfrac{x-5}{(x-5)\times(\sqrt{x+4}+3)} = \lim\limits_{x\to5^-} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+3} = \dfrac{1}{6}$ et $\lim\limits_{x\to5^+} = \dfrac{1}{6}$. On en déduit donc que la fonction f est prolongeable par continuité en 5 en posant $f(5) = \dfrac{1}{6}$.
2. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;-1\}$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle.
   $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$ donc g ne peut pas être pronlonger par continuité en -2.
   En revanche, il est possible de la prolonger en -1 en posant $g(-1) = 1$.