Exercices

Continuité

Exercice 1/27

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3]$ par :

$$f(x) = (3-x)\sqrt{3-x}$$

Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;3]$.

Exercice 2/27

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -4 & \text{si } x = -2 \end{cases}$

Étudier la continuité de la fonction f en -2.

Exercice 3/27

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ x+2 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 2 - \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } -0 < x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } -x > 2 \end{cases}$

Exercice 4/27

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Exercice 5/27

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	π	$\searrow$	0

1. A l'aide du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, justifier que :
   (a) l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 4]$.
   (b) l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]-\infty; 0]$.
2. Déterminer, à l'aide du tableau de variation, le nombre de solutions :
   (a) de l'équation $f(x) = 4$,
   (b) de l'équation $f(x) = -2$.
3. Sans justification, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ selon les valeurs du réel m.

Exercice 6/27 : Prolongement par continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + 7x^2 + 2x - 3}{2x - 1} & \text{si } x \neq \dfrac{1}{2} \\ \alpha \quad \text{si } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel :
$$2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = (2x - 1)(ax^2 + bx + c)$$
2. Pour quelle valeur de α la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7/27

1. Montrer que la fonction $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{3x - \cos(x)}{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est continue.
2. Montrer que la fonction $f \ : \ x \longmapsto \sqrt{3 - \cos(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue.

Exercice 8/27

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Exercice 9/27

Montrer que l'équation $e^x + 2x = 2$ admet une solution dans l'intervalle $I = [0; 1]$.

Exercice 10/27

Soit $g\ :\ x \longmapsto x^3 - 3x - 4$ définie sur $\mathbb{R}$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;3]$.

Exercice 11/27

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{u_n + 2}$, $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que la suite (u_n) et convergente et donner sa limite.

Exercice 12/27 : Vrai ou faux

1. Si la fonction f est continue en x_0, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe
2. Si la fonction f est continue en x_0, alors f est dérivable en x_0.
3. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Alors il existe un réel $c \in [0;1]$, unique tel que $f(c) = \dfrac{1}{2}$.
4. La fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ est continue en 0.
5. La fonction inverse n'est pas continue en 0.
6. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$. Alors (u_n) converge vers ℓ tel que $\ell = f(\ell)$.
7. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$. Alors (u_n) converge vers ℓ tel que $\ell = f(\ell)$.
8. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, avec f définie sur $\mathbb{R}$. Alors si (u_n) converge, sa limite est l'abscisse d'un point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$.
9. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.
10. Si une fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle ne tend pas vers l'infinie en 0 (ni en 0^+ ni en 0^-), alors on peut la prolonger par continuité en 0.

Exercice 13/27

Pour chaque question, étudier la continuité sur son ensemble de définition de la fonction f définie ci-dessous.

1. $f(x) = 5x^2 - \dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{4x + \cos(x)}{3x - 1}$
3. $f(x) = 5\sqrt{3x - 1}$

Exercice 14/27

Soit $f\ :\ \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} + 2 & \text{si } x \in]-\infty;0[\\ \sqrt{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Exercice 15/27

Soit $g\ :\ \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x+\alpha & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Tracer $\mathcal{C}_g$ sur $[-2;3]$ si $\alpha = 3$; la fonction semble-t-elle continue en 1 dans ce cas ? Déterminer la valeur de α pour que g soit continue en 1.

Exercice 16/27

Soit $h\ :\ \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Déterminer α pour que h soit continue en 0.

Exercice 17/27

Pour tout réel x, il existe un unique entier n (qui dépend de x) tel que $n \leq x < n+1$. On appelle partie entière de x cet entier n et on le note $\lfloor x \rfloor$.
Par exemple : $\lfloor 3,71 \rfloor = 3$ et $\lfloor -0,5 \rfloor = -1$

1. Représenter la fonction $E\ :\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ sur $[-4;4]$.
2. Par définition, pour tout réel x on a : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
   Montrer que pour tout réel x, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
3. En déduire les limites à l'infinie de la fonction E.
4. Étudier la continuité de la fonction E sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18/27

1. Soit $f\ :\ x \longmapsto x\lfloor x \rfloor$.
   (a) Simplifier l'écriture de $f(x)$ lorsque $x \in [i; i+1[$ pour $i \in \{-2;-1;0;1\}$.
   (b) Représenter la courbe de f sur $[-2;2]$.
   (c) Étudier la continuité de f en 0.
2. Étudier la continuité en 0 de $g\ :\ \begin{cases} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 19/27

Soit $f\ :\ [-1;4] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
On suppose connu le tableau de variations de f.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-1;4]$ et que $\alpha \in [1;4]$.
Dresser le tableau de signes de $f(x)$ en fonction de α.

x	-1		0		1		4
$f(x)$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Exercice 20/27

Soit $f \ : \ x \longmapsto x^3 - 12x - 8$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = -21$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; 2]$.
2. Déterminer, sans calculatrice, un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.
3. Déterminer, avec la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-3} près.

Exercice 21/27

Soit $g : [0; \pi] \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}\cos(x)$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; \pi]$.

Exercice 22/27

On considère l'équation $(E) : \cos(x) = x$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Tracer les courbes des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \cos(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Combien l'équation (E) semble-t-elle avoir de solutions sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?
2. Démontrer que (E) admet une unique solution α sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Préciser si α est supérieur ou inférieur à $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 23/27

1. Soit $f : x \mapsto -2x^3 - x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer le tableau de variations de f.
   (b) Démontrer que l'équation (E) $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; 1[$. Justifier que cette équation n'admet pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$.
   (c) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : x \mapsto x^2 + x + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
   (a) Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g.

Exercice 24/27

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de $g(x) = (x + 2)e^x - 1$
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   (a) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g. Préciser le minimum de g sur $\mathbb{R}$
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-3; 0]$. Justifier que l'équation n'admet pas d'autre solution dans $\mathbb{R}$. Préciser un encadrement de α à 10^{-3} près.
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de α.

3. Déterminer les limites de f à l'infini.
4. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.
5. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

Exercice 25/27

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{5u_n - 12}{u_n - 2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer f telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier les variations de f.
2. Démontrer que si $x \in [4; +\infty[$, alors $f(x) \in [4; +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4 \leq u_n$.
4. En raisonnant par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1..
5. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 26/27

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$.
   (a) Déterminer la tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.
   (b) Soit $J = [0; 1]$. Montrer que si $x \in J$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
   (c) Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f sur $[0; 2]$ dans un repère orthogonal d'unités 4 cm en abscisses et 8 cm en ordonnées.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Représenter graphiquement u_0, u_1 et u_2 sur le dessin précédent.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \in J$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 27/27

1. $f \,:\, x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$ définie sur $[-4; +\infty[\backslash\{5\}$ est-elle prolongeable par continuité en 5 ?
2. $g \,:\, x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; -1\}$ est-elle prolongeable par continuité en -2 et en -1 ?