Exercices

Intégration

Exercice 1/32

1. Soit f la fonction définie sur $[-3;1]$ par $f(x)=2$
   (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de f.
   (b) Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$
2. Soit g la fonction définie sur $[1;5]$ par $f(x)=x-1$
   (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de g.
   (b) Déterminer $\displaystyle\int_{1}^{5} g(x)\,dx$
3. Soit h la fonction définie sur $[-2;2]$ par $h(x)=|x|$
   (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de h.
   (b) Déterminer $\displaystyle\int_{-2}^{2} h(x)\,dx$
4. Soit k la fonction définie sur $[-2;3]$ par $k(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } -2\leq x\leq 0\\ x+1 & \text{si } 0<x\leq 3\end{cases}$
   (a) Tracer dans un repère la représentation graphique de k.
   (b) Déterminer $\displaystyle\int_{-2}^{3} k(x)\,dx$

Exercice 2/32

Soit F la fonction définie sur $[-2;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_{-2}^{x}\sqrt{t+2}\,dt$.

1. Donner une interprétation graphique de $F(2)$ et $F(3)$ puis comparer ces deux nombres.
2. Déterminer la dérivée de la fonction F sur $]-2;+\infty[$.
3. Étudier le sens de variations de F sur $[-2;+\infty[$ puis valider la conjecture.

Exercice 3/32

Déterminer l'intégrale à l'aide d'une primitive dans chacun des cas suivants.

1. $\displaystyle\int_{-3}^{5} 2x+8\,dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{4} x^2+x+1\,dx$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{2x}\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,dx$
8. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$
9. $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{2}{x^2}\,dx$
10. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}\,dx$

Exercice 4/32

1. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{(x+3)^2}$.
   (a) Vérifier que la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
   (b) En déduire $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,dx$.
2. Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{5\ln(x)}{x}+3$.
   (a) Vérifier que la fonction G définie sur $[1;+\infty[$ par $G(x)=\dfrac{5\ln(x)^2}{x}+3x$ est une primitive de G sur $[1;+\infty[$.
   (b) En déduire $\displaystyle\int_{2}^{4} g(x)\,dx$.

Exercice 5/32

Déterminer l'intégrale à l'aide d'une primitive dans chacun des cas suivants.

1. $\displaystyle\int_{1}^{3} x^3+4x^2-5x+1\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x+1)^2\,dx$
3. $\displaystyle\int_{1}^{e} \left(1-\frac{1}{x}\right)\,dx$
4. $\displaystyle\int_{4}^{9} x+\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{\ln(2)} 2x+e^x\,dx$
6. $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^{3x+1}\,dx$
7. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)-\sin(x)\,dx$
8. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^2+3}{x}\,dx$
9. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$
10. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$
11. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+3}\,dx$
12. $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$
13. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,dx$
14. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{2}{(3-5x)^2}\,dx$
15. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x+1)(x^2+x)^2\,dx$
16. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\ln(x)\,dx$

Exercice 6/32

1. Soit f une fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x\in]-;+\infty[$, $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x+1}$.

(b) En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

2. Soit g une fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{3x^2+12x+11}{(x+2)^2}$

(a) Démontrer que, pour tout $x\in]-2;+\infty[$, $g(x)=3-\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

(b) En déduire $\displaystyle\int_{-1}^4 g(x)\,dx$.

Exercice 7/32

Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx=2$ et $\displaystyle\int_{-1}^3 g(x)\,dx=-5$.

1. $\displaystyle\int_{-1}^3 7f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)+g(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-1}^3 2f(x)-3g(x)\,dx$

Exercice 8/32

1. Soit f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_1(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$.

(a) On pose $I_1=\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx$. Déterminer I_1.

(b) On pose $J_1=\displaystyle\int_0^1 g_1(x)\,dx$. Déterminer I_1+J_1 puis en déduire la valeur de J_1.

2. Soit f_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ et g_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_2(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

(a) On pose $J_2=\displaystyle\int_0^1 g_2(x)\,dx$. Déterminer J_2.

(b) On pose $I_2=\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,dx$. Déterminer I_2+J_2 puis en déduire la valeur de I_2.

Exercice 9/32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-x-2$.

1. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le signe des intégrales suivantes (sans les calculer).

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{3}^{5} f(x)\,dx$

Exercice 10/32

1. Soit f une fonction continue sur $[-5;7]$ telle que pour tout $x\in[-5;7]$, $1\leq f(x)\leq 3$.
Déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_{-5}^7 f(x)\,dx$.

2. Soit g une fonction continue sur $[-3;2]$ telle que pour tout $x \in [-3;2]$, $-2 \leq g(x) \leq 4$.
   Déterminer un encadrement de $\displaystyle\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$.

Exercice 11/32

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(t) = 2 - t$.

1. Soit $x \in [1;+\infty[$.
   Déterminer en fonction de x, $\displaystyle\int_{1}^{x} f(t)\,dt$.
2. Démontrer que, pour tout $t \in [1;+\infty[$, $2 - t \leq \dfrac{1}{t}$.
3. En déduire que, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2} \leq \ln(x)$.

Exercice 12/32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. Représenter $\mathcal{C}_f$ et calculer $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx$.

Exercice 13/32

Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_{1}^{3} (2x-1)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{-1}^{1} (-2t+3)\,dt$.

Exercice 14/32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 2x + 1$.
Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 0$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_{0}^{t} f(x)\,dx$.

Exercice 15/32

Soit f la fonction définie sur $I = [0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+6x+4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$.

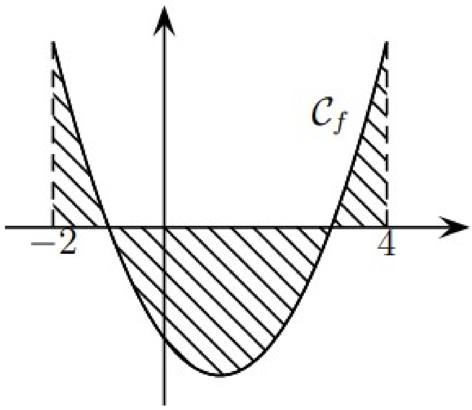
Exercice 16/32

Calculer les intégrales :
$I = \displaystyle\int_{0}^{2} 2x\,dx$, $J = \displaystyle\int_{1}^{3} (2x-1)\,dx$, $K = \displaystyle\int_{-1}^{1} (2t+3)\,dt$, $L = \displaystyle\int_{0}^{2} x^2\,dx$, $M = \displaystyle\int_{0}^{1} e^x\,dx$,
$N = \displaystyle\int_{2}^{4} \dfrac{1}{x+1}\,dx$ et $P = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx$.

Exercice 17/32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$, et on note $\mathcal{C}_f$ a courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner le tableau de signes de $f(x)$.
2. Calculer l'aire du domaine hachuré sur la figure ci-dessous.



Exercice 18/32

Soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4$. Calculer l'intégrale $\int_0^2 f(x)\,dx$.
Représenter l'allure de la courbe représentative de f et interpréter graphiquement le résultat précédent.

Exercice 19/32

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

1. $f(x) = x^2$ sur $[0; 1]$
2. $g(x) = (2 - x)(x - 1)$ sur $[-1; 0]$
3. $h(x) = e^x$ sur $[0; 1]$
4. $k(x) = e^{-3x+1}$ sur $[-1; 1]$
5. $l(x) = \dfrac{2}{3x + 1}$ sur $[0; 3]$
6. $m(x) = \dfrac{5}{(2x + 3)^2}$ sur $[0; 1]$

Exercice 20/32

Calculer $I = \int_1^2 (x^3 + \frac{2}{x})\,dx$ et $J = \int_1^2 (\frac{3}{x^2} - \frac{2}{2x + 1})\,dx$

Exercice 21/32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2+1}$.

Déterminer une expression de la fonction F définie par $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,dx$.

Exercice 22/32

Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

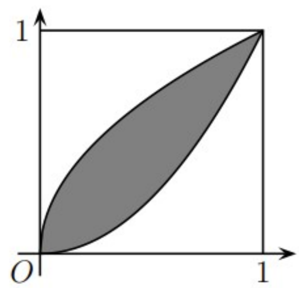
Déterminer le sens de variation de F.

Exercice 23/32

Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, donc de la forme x^n, afin de chercher une primitive)



Exercice 24/32

Calculer les intégrales :

1. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3+x^2+x)\,dx$
2. $I = \displaystyle\int_{2}^{5} 3\,dx$
3. $I = \displaystyle\int_{0}^{3} dx$
4. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} 2r^3\,dr$
5. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (2x+1)^3\,dx$
6. $I = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$
7. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{(2x+3)^2}\right)dx$
8. $I = \displaystyle\int_{1}^{2} \left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx$
9. $I = \displaystyle\int_{1}^{3} \left(x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx$
10. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$
11. $I = \displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\ln x\,dx$
12. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} (2e^x+1)\,dx$
13. $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x}\,dx$
14. $I = \displaystyle\int_{0}^{1} (e^x - e^{-x})\,dx$
15. $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - \sin x)\,dx$
16. $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos(2x)\,dx$
17. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(3t+\frac{\pi}{6}\right)dx$
18. $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

Exercice 25/32

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x-2}{x^2-1}$.

1. Vérifier que, pour tout x de $]1;+\infty[$, on a $f(x)=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $I=\displaystyle\int_2^4 \frac{4x-2}{x^2-1}$.

Exercice 26/32

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x)=a+\dfrac{be^x}{1+e^x}$.

En déduire $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Exercice 27/32

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x-x$.

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f.
2. En déduire l'intégrale $I=\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

Exercice 28/32

Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2$ est une primitive de la fonction $f: x\mapsto x\ln x$.

En déduire $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x\,dx$.

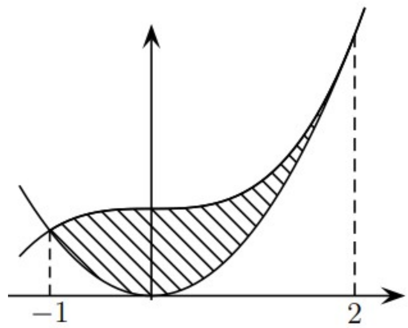
Exercice 29/32

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=(2t+1)e^{-t}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t)=(-2t-3)e^{-t}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
3. On définie la fonction G pour $x\geq 0$ par $G(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (c) Tracer dans un repère l'allure de la courbe représentative de la fonction f, et interpréter à l'aide de ce graphique la valeur $G(x)$ pour un nombre $x\geq 0$.
   (d) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

Exercice 30/32

Calculer l'aire du domaine, hachuré sur la figure ci-contre, délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 + 4$ et $g(x) = 3x^2$.



Exercice 31/32

Une chaînette est la courbe suivant laquelle se tend un fil homogène suspendu par ses extrémités à deux points fixes.
On admet que que la chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$.

1. Calculer la fonction dérivée f' de f.
2. Étudier alors le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer l'allure de la chaînette.

On admet que la longueur L de la chaînette (déformée et étirée sous l'action de son poids) est égale à l'intégrale $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + |f'(x)|^2}\, dx$.

1. En les calculant séparément, montrer que les deux expressions $1 + |f'(x)|^2$ et $|2f(x)|^2$ sont égales.
2. En déduire la longueur L de la chaînette.

Exercice 32/32

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - 2\ln x$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.
   (a) La courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse α.
   Déterminer la valeur exacte du réel α.
   (b) Calculer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g.
   (c) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variation de f.
5. (a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
   (Indication : on pourra écrire $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x + \dfrac{1}{x}$).
   (b) Soit $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\, dx$. Calculer I, et en donner une valeur approchée au centième.