Exercices

Equations polynômiales

Exercice 1/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$
2. $z^2 - z + 1 = 0$
3. $z^2 + z + 4 = 0$
4. $z^2 - 4z + 10 = 0$

Exercice 2/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 2z + 5 = 0$
2. $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$
3. $z^2 + 6z + 10 = 0$
4. $z^2 - 6z + 10 = 0$

Exercice 3/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(2+\sqrt{2}) = 0$
2. $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$
3. $z^2 - 2\sin(\theta)z + 1 = 0$

Exercice 4/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 4z - 1 = 0$
2. $z^2 + 11 = 0$
3. $3z^2 - 8z + 9 = z^2 - 2z + 4$
4. $z + \dfrac{1}{z} = 1$

Exercice 5/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$.
On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

Exercice 6/31

Soit les nombres complexes $z = 3 + 4i$ et $\omega = a + ib$ avec a et b réels.

1. Développer ω^2.
2. Déterminer $|z|$ et $|\omega|$.
3. En déduire trois relations entre a et b telles que $z = \omega^2$.
4. En déduire les racines de ω.

Exercice 7/31

En utilisant la méthode de l'exercice précédent, déterminer les racines des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = 2 - i\sqrt{3}$
3. $z = -3 + i\sqrt{2}$
4. $z = -2 - i\sqrt{2}$

Exercice 8/31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = 2z - 3i\overline{z}$.

1. Déterminer z tel que $f(z) = z$.
2. Déterminer les antécédents de 7 et de $5i$ par f.

Exercice 9/31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = 3z^2 + 1$.

1. Déterminer z tel que $f(z) = z$.
2. Déterminer les antécédents de -5 par f.

Exercice 10/31

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ par $f(z) = \dfrac{2iz - 1}{z + i}$.

1. Déterminer z tel que $f(z) = z$.
2. Déterminer les antécédents de i par f.

Exercice 11/31

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z - 4}{z} = i$.
2. Écrire la solution sous forme exponentielle.

Exercice 12/31

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.
2. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 13/31

1. Développer le produit $(z^2+3z+4)(2z^2-z+1)$.
2. En déduire la solution de l'équation $E\ :\ 2z^4+5z^3+6z^2-z+4=0$.

Exercice 14/31

Soit (E) l'équation $z^4+10z^2+9=0$. En posant $Z=z^2$, résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 15/31

1. Déterminer le nombre complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+i) & =1+3i \\ i\alpha^2 & =-4+3i \end{cases}$
2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z)=z^2-(1+3i)z+(-4+3i)$. Vérifier que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-i\alpha)$.
3. En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z)=0$.

Exercice 16/31

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^4-z^3\sqrt{2}-4z\sqrt{2}-16$.

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=(z^2+4)(z^2+az+b)$.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(z)=0$.

Exercice 17/31

Factoriser les trinômes du second degré suivants :

1. $4z^2+9z-9$
2. z^2-3z+4
3. $-z^2+10z-25$

Exercice 18/31 : *

Factoriser les polynômes de degré 3 suivants :

1. z^3-8
2. $z^3+z^2-17z+15$

Exercice 19/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^4-7z^2+12=0$
2. $z^4+3z^2-4=0$

Exercice 20/31 : *

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $z^3-27=0$
2. $z^4-1=0$

Exercice 21/31

On considère l'équation $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$. (E)

1. Vérifier que 2 est solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 22/31 : *

Après avoir montré que i et $-i$ sont solutions, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - z^3 + 3z^2 - z + 2 = 0$$

Exercice 23/31 : *

On considère l'équation suivante :

$$z^3 - (4+3i)z^2 + z(2+12i) - 6i = 0 \quad (E)$$

1. Vérifier que $3i$ est solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ léquation (E).

Exercice 24/31 : **

On considère l'équation $z^4 + z^2 + 1 = 0$ (E)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2. Écrire les solutions sous forme exponentielle.
3. En utilisant ce qui précède, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 25/31 : **

On considère l'équation du second degré à coefficients complexes

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (E)$$

avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b,\ c \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer que les formules données dans le cours se généralisent à une équation du second degré à coefficients complexes. Pour cela, nous allons faire appel aux racines carrées d'un nombre complexe. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E) et δ une racine carrée de Δ.

1. En mettant le trinôme $az^2 + bz + c$ sous forme canonique, montrer que :
   - si $\Delta = 0$, (E) admet une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$;
   - si $\Delta \neq 0$, (E) admet deux solutions distinctes

   $$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$
2. En remarquant que $(1+i)^2 = 2i$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 + (3-i)z - 2 - 2i = 0$.
3. Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées complexes de $5 + 12i$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z - 1 - 3i = 0$.

Exercice 26/31 : Méthode de Cardan **

La résolution d'une équation de degré 3 $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, b, c, $d \in \mathbb{R}$ peut toujours se ramener à une équation plus simple de la forme $z^3 + pz + q$, où p, $q \in \mathbb{R}$. On peut alors résoudre cette dernière équation grâce à la méthode de Cardan. Nous allons présenter cette méthode pour résoudre l'équation du troisième degré suivante :

$$z^3 - 30z - 36 = 0 \quad (E)$$

Pour cela, on pose $z = u + v$ avec u et v deux nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. Donner les solutions sous forme exponentielle.
2. Montrer que $z^3 - 3uvz - (u^3 + v^3) = 0$.
   On choisit en conséquence u et v tels que $uv = 10$ et $u^3 + v^3 = 36$ de sorte que $z^3 - 30z - 36 = 0$.
3. Calculer u^3v^3 puis déterminer la valeur de u^3 et v^3. On choisira u^3 tel que $\mathrm{Im}(u^3) > 0$.
4. Calculer $(3 + i)^3$.
5. A l'aide des questions précédentes, déduire toutes les valeurs possibles du nombre complexe u.
6. Déterminer alors toutes les valeurs possibles pour le couple (u, v).
7. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

Exercice 27/31

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

1. (a) Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.
   (b) Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que :
   $$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ P(z) = (z^2 + 1)Q(z)$$
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 28/31

1. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)\quad z^2 + 2z + 2 = 0$.
   (a) Résoudre l'équation (E). On notera z_1 et z_2 les solutions.
   (b) Calculer $z_1^n + z_2^n$ pour n entier naturel non nul.
2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E')\quad \dfrac{z+1}{z-1} = 1$.
   (a) Résoudre l'équation (E').
   (b) On pose $\mathbb{C}' = \mathbb{C}\backslash\{1\}$.
   Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{C}'$ par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$ est involutive, c'est à dire que : $\forall x \in \mathbb{C}',\ f \circ f(z) = z$.
3. former une équation du second degré admettant $f(z_1)$ et $f(z_2)$ pour racines.

Exercice 29/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 + z^3 - 2 = 0$.

Exercice 30/31

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 - 2z^2 \cos(2\alpha) + 1 = 0$

Exercice 31/31

1. Déterminer les nombres complexes $z = a + ib$ tel que $z^2 = 5 - 12i$.
2. Soit (E) l'équation $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$.
   (a) Déterminer une solution imaginaire pure de l'équation (E). On notera z_0 cette solution.
   (b) Déterminer a et b complexes tels que
   $$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z - z_0)(z^2 + az + b).$$
   (c) En déduire les solutions de (E).
3. Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixes les solutions de (E) ?