

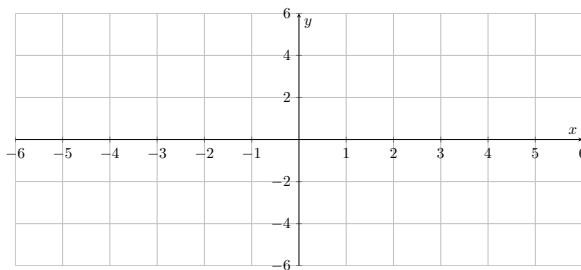


## Exercices

# NOMBRES COMPLEXES

### Exercice 1/28

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soient les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = 3 - 3i$ ,  $z_B = -1 + 2i$ ,  $z_C = -3 - 4i$  et  $z_D = 4 + 5i$ .



1. Placer les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
2. Calculer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$
3. Calculer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{CD}$
4. Calculer l'affixe du milieu du segment  $[AB]$ .

### Exercice 2/28

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| 1. $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$ | 5. $(2 - 2i)^2$         |
| 2. $(5 - i) - (2 - 8i)$   | 6. $(x + iy)(x' + iy')$ |
| 3. $(1 - i)(4 - 2i)$      | 7. $(x + iy)^2$         |
| 4. $\frac{4 - i}{5 - 3i}$ | 8. $(2 - 3i)(2 + 3i)$   |
|                           | 9. $(a + ib)(a - ib)$   |

### Exercice 3/28

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- |                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. $z_1 = 4e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ | 3. $z_3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$  |
| 2. $z_2 = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$   | 4. $z_4 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$ |

**Exercice 4/28**

Déterminer la forme trigonométrique, puis exponentielle, des nombres complexes suivants :

- |                                 |                            |
|---------------------------------|----------------------------|
| 1. $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$      | 5. $z_4 = \sqrt{2}$        |
| 2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ | 6. $z_5 = -5 - 5i\sqrt{3}$ |
| 3. $z_2 = 5 - 5i$               |                            |
| 4. $z_3 = -i$                   | 7. $z_6 = 1 + i$           |

**Exercice 5/28**

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $z_1 = 3 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right)$   | 3. $z_3 = 4 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right)$ |
| 2. $z_2 = 2 \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$ | 4. $z_4 = 6 (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$  |

**Exercice 6/28**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équation suivantes. Les résultats doivent être données sous forme algébrique.

- |                           |                                |
|---------------------------|--------------------------------|
| 1. $2z - 5i = 5z - 2$     | 4. $(3 + 4i)z = 3$             |
| 2. $3(2z - 4i) = 4z - 7i$ | 5. $2z + 3 = iz - 5i$          |
| 3. $2iz - 7 = 0$          | 6. $(2z - 7i + 3)(z + 4i) = 0$ |

**Exercice 7/28**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équation suivantes.

1.  $z^2 = 6$
2.  $z^2 = -4$
3.  $z^2 = -25$
4.  $(z - 3)^2 = -49$
5.  $2z^2 + 18 = 0$

**Exercice 8/28**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soient les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = -2 - 2i$ ,  $z_B = 1 - 3i$ ,  $z_C = 3 + 4i$  et  $z_D = -2 + 5i$ .

1. Placer les points  $A, B, C$  et  $D$ .
2. Calculer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$
3. Calculer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{CD}$

**Exercice 9/28**

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| 1. $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$ | 6. $(x + iy)(x' + iy')$ |
| 2. $(5 + i) - (3 - 2i)$   | 7. $(x + iy)^2$         |
| 3. $(1 + i)(3 - 2i)$      | 8. $(2 - 3i)(2 + 3i)$   |
| 4. $(4 + i)(-5 + 3i)$     |                         |
| 5. $(2 - i)^2$            | 9. $(a + ib)(a - ib)$   |

**Exercice 10/28**

Écrire sous forme trigonométrique, puis algébrique, les nombres complexes suivants :

- |                                 |                                  |
|---------------------------------|----------------------------------|
| 1. $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ | 3. $z_3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$   |
| 2. $z_2 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$ | 4. $z_4 = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$ |

**Exercice 11/28**

Déterminer la forme trigonométrique puis exponentielle des nombres complexes suivants :

- |                                 |                            |                     |
|---------------------------------|----------------------------|---------------------|
| 1. $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$      | 3. $z_3 = -5 - 5i\sqrt{3}$ | 5. $z_5 = \sqrt{2}$ |
| 2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ | 4. $z_4 = -i$              | 6. $z_6 = 1 + i$    |

**Exercice 12/28**

Simplifier les calculs suivants en les mettant sous la forme  $re^{i\theta}$  où  $r$  et  $\theta$  sont deux réels.

1.  $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}}$
2.  $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \times 5e^{i\frac{5\pi}{6}}$
3.  $z_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 4e^{i\frac{-\pi}{6}}$

**Exercice 13/28**

Simplifier les calculs suivants en les mettant sous la forme  $re^{i\theta}$  où  $r$  et  $\theta$  sont deux réels.

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}}$   | 4. $z_1 = \frac{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$  | 6. $z_3 = \frac{25e^{i\frac{\pi}{4}}}{5e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$ |
| 2. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \times 5e^{i\frac{5\pi}{6}}$  | 5. $z_2 = \frac{5e^{i\frac{2\pi}{3}}}{3e^{i\frac{-\pi}{6}}}$ | 7. $z_4 = (4e^{i\frac{\pi}{3}})^2$                            |
| 3. $z_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 4e^{i\frac{-\pi}{6}}$ |  |   |

**Exercice 14/28**

On considère dans le plan complexe les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixe  $z_A = 3 + i$ ,  $z_B = 2 - 2i$ ,  $z_C = 2i$  et  $z_D = 1 + 5i$ .

1. Faire une figure
2. Donner l'affixe de  $\bar{A}$ , point conjugué de  $A$  dans le plan complexe.
3. Calculer la distance  $AB$  après avoir déterminé l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .
4. Calculer la distance  $CD$  après avoir déterminé l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{CD}$ .
5. A l'aide des réponses aux questions précédentes, montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.

**Exercice 15/28**

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour affixe respective  $-2 + i$ ,  $3 + 3i$ ,  $1 + \frac{11}{5}i$ .

1. Calculer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
2. En déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.
3. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

**Exercice 16/28**

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour affixe respective  $1 + \frac{1}{2}i$ ,  $\frac{3}{2} + 2i$  et  $-1 - \frac{11}{2}i$ .

Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

**Exercice 17/28**

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{3} + 2i} \quad \bullet \frac{1+4i}{1-\sqrt{2}i} \quad \bullet 2 + i\sqrt{3}(5-i) + \frac{1}{2} + 3i^2 \quad \bullet i^3 \quad \bullet \frac{1}{i} \quad \bullet i^4 \quad \bullet i^5 \quad \bullet i^6$$

**Exercice 18/28**

1. Donner la forme algébrique de :  $i^{12}$ ;  $i^{2012}$ ;  $i^{37}$ ;  $i^{-13}$
2. Calculer la somme :  $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2014}$
3. On pose  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Calculer  $1 + j + j^2$ .

**Exercice 19/28**

Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{array}{lllll} \bullet z_1 = 3 & \bullet z_2 = -4 & \bullet z_3 = 2i & \bullet z_4 = -1 + i & \bullet z_5 = -\sqrt{3} + i \\ \bullet z_6 = -17 & \bullet z_7 = -6\sqrt{3} + 6i & \bullet z_8 = 5i & \bullet z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}. & \end{array}$$

**Exercice 20/28**

1. Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

(a)  $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(c)  $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

(e)  $2e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

(b)  $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$

(d)  $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

(f)  $\frac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

2. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

(a) 5

(c)  $\frac{3}{2}i$

(e)  $\sqrt{3} - i$

(b)  $4 + 4i$

(d)  $\frac{2}{1-i}$

(f)  $(\sqrt{3} - i)^2$

(g)  $(\sqrt{3} - i^3)$

### Exercice 21/28

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = 5 \cos(t - \frac{\pi}{4})$  et  $g(t) = 2 \sin(t + \frac{\pi}{6})$ .

Pour tout réel  $t$ , exprimer  $f(t)$  sous la forme  $a \cos(t) + b \sin(t)$  avec  $a$  et  $b$  à déterminer.

Pour tout réel  $t$ , exprimer  $g(t)$  sous la forme  $a \sin(t) + b \cos(t)$  avec  $a$  et  $b$  à déterminer.

### Exercice 22/28

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = \cos(2t) - \sqrt{3} \sin(2t)$ .

Pour tout réel  $t$ , exprimer  $f(t)$  sous la forme  $f(t) = A \cos(2t + \phi)$ , puis  $f(t) = A \sin(2t + \phi)$  avec  $A$  et  $\phi$  à déterminer.

### Exercice 23/28

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On considère le vecteur  $\vec{w}$  d'affixe  $-1 - 4i$  et le point  $A$  d'affixe  $z_A = -1 - 5i$ . Déterminer l'affixe du point  $A'$  image du point  $A$  par la translation de vecteur  $\vec{w}$ .
2. On considère le point  $A$  d'affixe  $z_A = 4 - 4i$ . Déterminer l'affixe du point  $A'$  image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .
3. On considère le point  $A$  d'affixe  $z_A = -6i$ . Déterminer l'affixe du point  $A'$  image de  $A$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport -2.

### Exercice 24/28

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. Quelle est l'expression complexe de la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ .
2. On considère la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et le point  $A$  d'affixe  $z_A = 3 - 4i$ . Déterminer l'affixe du point  $A'$  image de  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

### Exercice 25/28

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. On considère l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 2 et le point  $A$  d'affixe  $z_A = -3i$ . Déterminer l'affixe du point  $A'$  image de  $A$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 2.
2. On considère l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{4}$  et le point  $B$  d'affixe  $z_B = 12 - 8i$ .

Déterminer l'affixe du point  $B'$  image de  $B$  par l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{1}{4}$ .

### Exercice 26/28

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :  $z_A = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ . Les points  $O$ ,  $A$  et  $B$  sont-ils alignés ?

### Exercice 27/28

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

$$\begin{aligned} 1. \ z &= \frac{1+i}{1-i} \\ 2. \ e &= \frac{2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))}{\frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \ z &= \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \\ 4. \ \cos(\frac{\pi}{6}) - i\sin(\frac{\pi}{6}) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \ z &= 1 + e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ 6. \ z &= (1+i\sqrt{3})^6 \end{aligned}$$

### Exercice 28/28

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

1. Soit  $t$  la translation de vecteur  $\vec{w} = 2\vec{u}$  qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ . Donner l'écriture complexe de la transformation  $t$ , c'est à dire l'expression de  $z'$  en fonction de  $z$ .
2. Soit  $r$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M_1$  d'affixe  $z_1$  telle que  $z_1 = -iz + 4i$ .
  - (a) Déterminer un point  $\Omega$  tel que  $r(\Omega) = \Omega$ .
  - (b) Démontrer que  $r$  est une rotation de centre  $\Omega$  dont on précisera l'angle.