

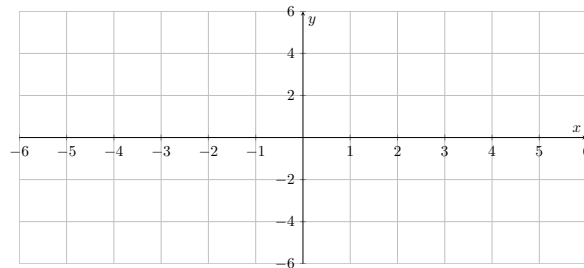


Exercices

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1/28

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3 - 3i$, $z_B = -1 + 2i$, $z_C = -3 - 4i$ et $z_D = 4 + 5i$.



1. Placer les points A, B, C et D .
2. Calculer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}
3. Calculer l'affixe du vecteur \overrightarrow{CD}
4. Calculer l'affixe du milieu du segment $[AB]$.

Exercice 2/28

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| 1. $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$ | 5. $(2 - 2i)^2$ |
| 2. $(5 - i) - (2 - 8i)$ | 6. $(x + iy)(x' + iy')$ |
| 3. $(1 - i)(4 - 2i)$ | 7. $(x + iy)^2$ |
| 4. $\frac{4 - i}{5 - 3i}$ | 8. $(2 - 3i)(2 + 3i)$ |
| | 9. $(a + ib)(a - ib)$ |

Exercice 3/28

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 1. $z_1 = 4e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ | 3. $z_3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$ |
| 2. $z_2 = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$ | 4. $z_4 = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}$ |

Exercice 4/28

Déterminer la forme trigonométrique, puis exponentielle, des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$

5. $z_4 = \sqrt{2}$

2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

6. $z_5 = -5 - 5i\sqrt{3}$

3. $z_2 = 5 - 5i$

7. $z_6 = 1 + i$

4. $z_3 = -i$

Exercice 5/28

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 3 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$

3. $z_3 = 4 \left(\cos \left(\frac{-\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$

2. $z_2 = 2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$

4. $z_4 = 6 (\cos(\pi) + i \sin(\pi))$

Exercice 6/28

Résoudre dans \mathbb{C} les équation suivantes. Les résultats doivent être données sous forme algébrique.

1. $2z - 5i = 5z - 2$

4. $(3 + 4i)z = 3$

2. $3(2z - 4i) = 4z - 7i$

5. $2z + 3 = iz - 5i$

3. $2iz - 7 = 0$

6. $(2z - 7i + 3)(z + 4i) = 0$

Exercice 7/28

Résoudre dans \mathbb{C} les équation suivantes.

1. $z^2 = 6$

2. $z^2 = -4$

3. $z^2 = -25$

4. $(z - 3)^2 = -49$

5. $2z^2 + 18 = 0$

Exercice 8/28

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -2 - 2i$, $z_B = 1 - 3i$, $z_C = 3 + 4i$ et $z_D = -2 + 5i$.

1. Placer les points A, B, C et D .

2. Calculer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

3. Calculer l'affixe du vecteur \overrightarrow{CD}

Exercice 9/28

Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

1. $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$
2. $(5 + i) - (3 - 2i)$
3. $(1 + i)(3 - 2i)$
4. $(4 + i)(-5 + 3i)$
5. $(2 - i)^2$

6. $(x + iy)(x' + iy')$
7. $(x + iy)^2$
8. $(2 - 3i)(2 + 3i)$
9. $(a + ib)(a - ib)$

Exercice 10/28

Écrire sous forme trigonométrique, puis algébrique, les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$
2. $z_2 = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$
3. $z_3 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$
4. $z_4 = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$

Exercice 11/28

Déterminer la forme trigonométrique puis exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = -3\sqrt{3} - 3i$
2. $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$
3. $z_3 = -5 - 5i\sqrt{3}$
4. $z_4 = -i$
5. $z_5 = \sqrt{2}$
6. $z_6 = 1 + i$

Exercice 12/28

Simplifier les calculs suivants en les mettant sous la forme $re^{i\theta}$ où r et θ sont deux réels.

1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \times 5e^{i\frac{5\pi}{6}}$
3. $z_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 4e^{i\frac{-\pi}{6}}$

Exercice 13/28

Simplifier les calculs suivants en les mettant sous la forme $re^{i\theta}$ où r et θ sont deux réels.

1. $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \times 5e^{i\frac{5\pi}{6}}$
3. $z_1 = 6e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 4e^{i\frac{-\pi}{6}}$
4. $z_1 = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$
5. $z_2 = \frac{5e^{i\frac{\pi}{2}}}{3e^{i\frac{\pi}{6}}}$
6. $z_3 = \frac{25e^{i\frac{\pi}{4}}}{5e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$
7. $z_4 = (4e^{i\frac{\pi}{3}})^2$

Exercice 14/28

On considère dans le plan complexe les points A , B , C et D d'affixe $z_A = 3 + i$, $z_B = 2 - 2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1 + 5i$.

1. Faire une figure
2. Donner l'affixe de \overline{A} , point conjugué de A dans le plan complexe.
3. Calculer la distance AB après avoir déterminé l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB} .
4. Calculer la distance CD après avoir déterminé l'affixe du vecteur \overrightarrow{CD} .
5. A l'aide des réponses aux questions précédentes, montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 15/28

Les points A , B et C ont pour affixe respective $-2 + i$, $3 + 3i$, $1 + \frac{11}{5}i$.

1. Calculer les affixes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. En déduire que les points A , B et C sont alignés.
3. Placer les points A , B et C .

Exercice 16/28

Les points A , B et C ont pour affixe respective $1 + \frac{1}{2}i$, $\frac{3}{2} + 2i$ et $-1 - \frac{11}{2}i$.
Montrer que les points A , B et C sont alignés.

Exercice 17/28

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{3} + 2i} \quad \bullet \frac{1 + 4i}{1 - \sqrt{2}i} \quad \bullet 2 + i\sqrt{3}(5 - i) + \frac{1}{2} + 3i^2 \quad \bullet i^3 \quad \bullet \frac{1}{i} \quad \bullet i^4 \quad \bullet i^5 \quad \bullet i^6$$

Exercice 18/28

1. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
2. Calculer la somme : $S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2014}$
3. On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1 + j + j^2$.

Exercice 19/28

Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} \bullet z_1 = 3 & \quad \bullet z_2 = -4 & \quad \bullet z_3 = 2i & \quad \bullet z_4 = -1 + i & \quad \bullet z_5 = -\sqrt{3} + i \\ \bullet z_6 = -17 & \quad \bullet z_7 = -6\sqrt{3} + 6i & \quad \bullet z_8 = 5i & \quad \bullet z_9 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Exercice 20/28

1. Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

(a) $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(c) $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

(e) $2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{3\pi}{2}}$

(b) $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$

(d) $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$

(f) $\frac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

2. Écrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

(a) 5

(c) $\frac{3}{2}i$

(e) $\sqrt{3} - i$

(b) $4 + 4i$

(d) $\frac{2}{1-i}$

(f) $(\sqrt{3} - i)^2$

(g) $(\sqrt{3} - i^3)$

Exercice 21/28

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(t) = 5 \cos(t - \frac{\pi}{4})$ et $g(t) = 2 \sin(t + \frac{\pi}{6})$.

Pour tout réel t , exprimer $f(t)$ sous la forme $a \cos(t) + b \sin(t)$ avec a et b à déterminer.

Pour tout réel t , exprimer $g(t)$ sous la forme $a \sin(t) + b \cos(t)$ avec a et b à déterminer.

Exercice 22/28

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = \cos(2t) - \sqrt{3} \sin(2t)$.

Pour tout réel t , exprimer $f(t)$ sous la forme $f(t) = A \cos(2t + \phi)$, puis $f(t) = A \sin(2t + \phi)$ avec A et ϕ à déterminer.

Exercice 23/28

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère le vecteur \vec{w} d'affixe $-1 - 4i$ et le point A d'affixe $z_A = -1 - 5i$. Déterminer l'affixe du point A' image du point A par la translation de vecteur \vec{w} .
2. On considère le point A d'affixe $z_A = 4 - 4i$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
3. On considère le point A d'affixe $z_A = -6i$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

Exercice 24/28

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Quelle est l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. On considère la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et le point A d'affixe $z_A = 3 - 4i$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 25/28

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère l'homothétie de centre O et de rapport 2 et le point A d'affixe $z_A = -3i$. Déterminer l'affixe du point A' image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2 .
2. On considère l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{4}$ et le point B d'affixe $z_B = 12 - 8i$.

Déterminer l'affixe du point B' image de B par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{4}$.

Exercice 26/28

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.
Les point O , A et B sont-ils alignés ?

Exercice 27/28

Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

- | | | |
|--|---|----------------------------------|
| 1. $z = \frac{1+i}{1-i}$ | 3. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ | 5. $z = 1 + e^{-\frac{i\pi}{6}}$ |
| 2. $e = \frac{2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))}{\frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))}$ | 4. $\cos(\frac{\pi}{6}) - i\sin(\frac{\pi}{6})$ | 6. $z = (1 + i\sqrt{3})^6$ |

Exercice 28/28

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Soit t la translation de vecteur $\vec{w} = 2\vec{u}$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' . Donner l'écriture complexe de la transformation t , c'est à dire l'expression de z' en fonction de z .
- Soit r la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que $z_1 = -iz + 4i$.
 - Déterminer un point Ω tel que $r(\Omega) = \Omega$.
 - Démontrer que r est une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.